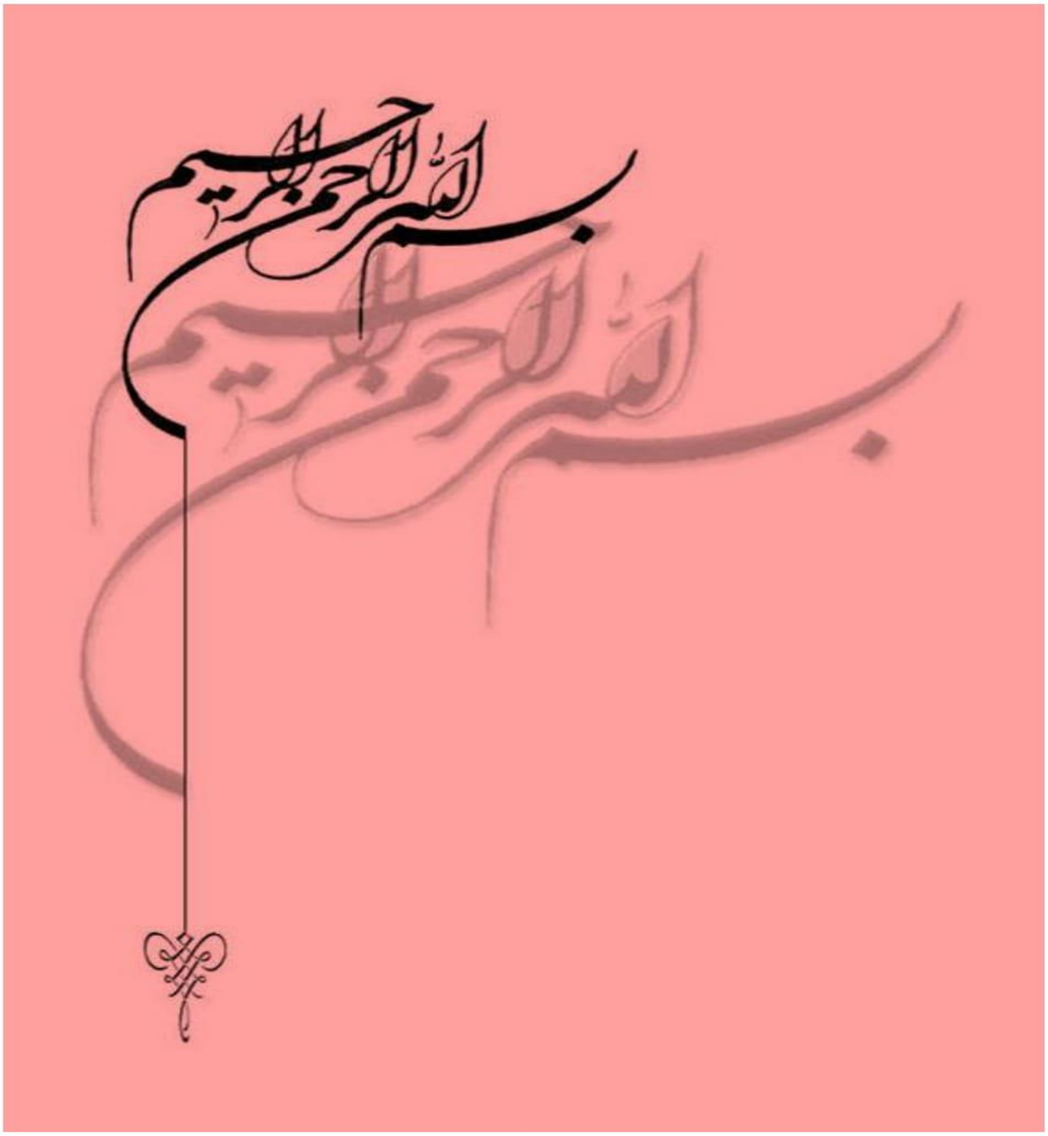
استاد : حبیب هاشمی

مبحث : جزوه فصل چهارم ریاضی پیش دانشگاهی تجربی کاربرد مشتق

@eshgheriazikonkour ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ حبیب هاشمی www.riazikade.ir



www.riazikade.ir حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ @eshgheriazikonkour

کاربرد مشتق

فصل چهارم ریاضی عمومی پیش دانشگاهی
و
فصل سوم حساب دیفرانسیل و انتگرال پیش دانشگاهی

- آموزش نکته ها و مفاهیم
- پاسخ های تشریحی به سوالات
- سوالات چند گزینه ای
- تمرین‌های برای آمادگی

مؤلف:

حبیب هاشمی

۱۳۹۶

@eshgheriazikonkour ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ حبیب هاشمی www.riazikade.ir

مقدمه

جزوه حاضر که براساس مطالب کتاب درسی ریاضی عمومی پیش دانشگاهی رشته علوم تجربی و حساب دیفرانسیل پیش دانشگاهی رشته ریاضی و فیزیک، مبحث «کاربرد مشتق» نگارش شده است، دارای ویژگی های زیر است:

۱- باز کردن مفاهیمی که در کتاب درسی به علت محدودیت حجم، به آن کمتر پرداخته شده است.

۲- مطالب به صورت ساده و روان و به زبان دانش آموز ارائه شده است.

۳- مطالب و نکات، به گونه ایی است که خلأ بین مطالب ارائه شده در کتب درسی و سؤالات مطرح شده در کنکورهای سراسری را پر کند.

۴- در این کتاب با نگاهی عمیق‌تر و جامع‌تر از کتاب درسی، به مطالب پرداخته شده و به همین منظور از مثال‌ها و مسائل حل شده متنوعی بهره گرفته ایم.

۵- ایجاد تعادل نسبی بین مهارت های محاسبات صوری و درک مفهومی.

۶- استفاده از مسائل باز پاسخ.

۷-توجه به دانش قبلی دانش آموزان.

۸- ایجاد اتصال و ارتباط بین جنبه های متفاوت یک مفهوم و نیز بین یک مفهوم و دیگر مفاهیم کتاب.

در پایان امیدواریم که مطالعه ی دقیق این کتاب و بهره گیری از رهنمودهای دبیران فرهیخته و گران قدر بتواند موفقیت تحصیلی شما خوبان را تضمین و تثبیت نماید. ارائه ی نظرات شما دانش پژوهان، دبیران فرهیخته و گران قدر، موجب سپاس و امتنان است.

حبیب هاشمی

فهرست مطالب

عنوان صفحه

نقاط بحرانی

تعریف: نقطه‌ی درونی $C \in D_f$ را نقطه‌ی بحرانی تابع f می‌نامیم هر گاه $f'(c) = ۰$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

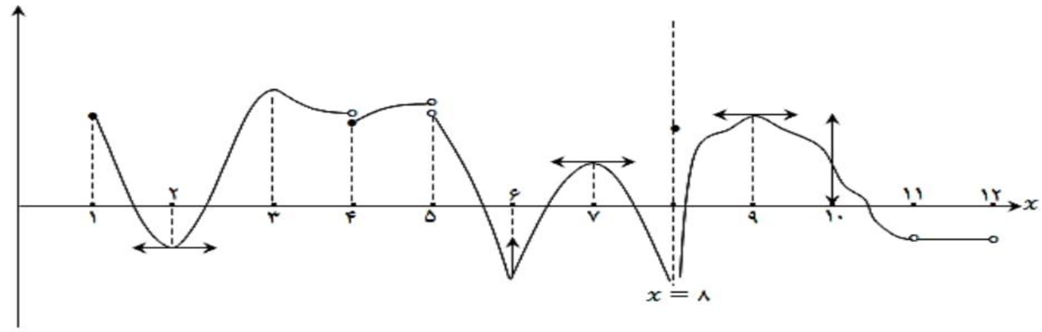
نکته: با تعریف فوق نتیجه می‌شود که اگر تابع f بر بازه‌ی بسته‌ی $[a , b]$ تعریف شده باشد چون $x = a$ و $x = b$ نقاط درونی نیستند پس آن‌ها جزء نقاط بحرانی محسوب نمی‌شوند.

مثال: بحرانی بودن یا نبودن نقاط مشخص شده را با ذکر دلیل مشخص کنید.

حل:

نکته : نقاطی که مشتق در آن‌ها صفر است نقاطی هستند که مماسی به موازات محور xها دارند مانند نقاط ۲ و ۷ و ۹ درشکل زیر.

نکته : نقاطی که در آنها مشتق وجود ندارد سه دسته هستند: دسته ی اول نقاط نوک تیز مانند ۳ و ۶ دسته دوم نقاطی که مماسی به موازی محور yها دارند مانند ۱۰ و ۶ دسته سوم نقاط ناپیوستگی مانند ۴ و ۸.



نقطه ۱ : بحرانی نیست.

نقطه ۲ : بحرانی هست (مشتق صفر است).

نقطه ۷ : بحرانی هست (مشتق صفر است).

نقطه ۳ : بحرانی هست (مشتق موجود است).

نقطه ۸ : بحرانی هست (مشتق موجود نیست).

نقطه ۴ : بحرانی هست (مشتق موجود نیست).

نقطه ۹ : بحرانی هست (مشتق صفر است).

نقطه ۵ : $۵ \notin D_f$ پس بحرانی نیست.

نقطه ۱۰ : بحرانی هست (مشتق موجود نیست).

نقطه ۶ : بحرانی هست (مشتق موجود نیست).

نقطه ۸ : بحرانی نیست چون عضو دامنه نیست.

(اگر تابع در فاصله‌ای ثابت باشد (موازی محور xها) تمـام نقـاط آن بحرانـی اسـت زیـرا مشتق آن‌ها صفر می‌شود مانند بازه‌ی $(۱۱ , ۱۲)$ شکل بالا).

۱.۱ به دست آوردن نقاط بحرانی توابـع چنـد جملـه‌ای،کسـری، مثلثـاتی، لگاریتم طبیعی، نمایی و توابع رادیکالی با فرجه زوج

از تابع مشتق می‌گیریم وصورت آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم ریشه‌های بدست آمـده همان نقاط بحرانی‌اند.

تذکر۱: دقت کنید نقاط به دست آمده در بازه‌ی داده شده قرار داشته باشند.

تذکر۲: در لگاریتم طبیعی و توابع رادیکالی با فرجه زوج نقطه بـه دسـت آمـده بایـد بـا دامنه چک شود.

مثال: مجموعه طول‌های نقاط بحرانی تابع $y = x^۳ - ۳x^۲$ را بیابید.

حل:

$$y' = ۳x^۲ - ۶x = ۰ \longrightarrow ۳x(x-۲) = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۲ \end{cases}$$

مثال: نقاط بحرانی تابع $y = -۲x^۳ + ۳x^۲$ را بر بازه‌ی $\left[-\frac{۱}{۲}\,,\,۱\right]$ را بیابید.

حل:

$$y' = -۶x^۲ + ۶x = ۰ \longrightarrow \begin{cases} x = ۰ \quad \text{ق ق} \qquad ۰ \in \left[-\frac{۱}{۲}\,,۱\right] \\ x = ۱ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

مثال: نقاط بحرانی تابع $y = x^۳ - ۳x^۲ - ۹x + ۵$ در بازه‌ی $[-۲\,,۲]$ کدام است؟

حل:

$$y' = ۳x^۲ - ۶x - ۹ = ۰ \longrightarrow ۳(x^۲ - ۲x - ۳) = ۰$$

$$\longrightarrow (x-۳)(x+۱) = ۰ \longrightarrow \begin{cases} x = ۳ \longrightarrow \text{غ ق ق} \\ x = -۱ \longrightarrow \text{ق ق} \end{cases}$$

مثال: نقاط بحرانی تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x^۴}{۴} - \frac{x^۳}{۳} - x^۲$ روی بازه‌ی $[-۱\,,۳]$ کدام است؟

حل:

$$f'(x) = ۰ \Longrightarrow \frac{۴x^۳}{۴} - \frac{۳x^۲}{۳} - ۲x = ۰$$

$$\Longrightarrow x^۳ - x^۲ - ۲x = ۰ \Longrightarrow x(x^۲ - x - ۲) = ۰$$

$$\longrightarrow x(x-۲)(x+۱) = ۰$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = ۰ & \text{ق ق} \\ x = ۲ & \text{ق ق} \\ x = -۱ & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$x = -۱$ غ ق ق چون اول بازه است .

مثال: نقاط بحرانی توابع زیر را بیابید. (تمرین ریاضی عمومی ص ۸۶)

۱) $f(x) = ۲x^۳ - ۹x^۲ + ۱۲x + ۶۰$

حل:

$$f'(x) = ۰ \Longrightarrow ۶x^۲ - ۱۸x + ۱۲ = ۰ \longrightarrow ۶(x^۲ - ۳x + ۲) = ۰$$

$$\longrightarrow ۶(x-۲)(x-۱) = ۰ \Longrightarrow \begin{cases} x - ۱ = ۰ \longrightarrow x = ۱ \\ x - ۲ = ۰ \longrightarrow x = ۲ \end{cases}$$

۲) $f(x) = ۲x^۳ - ۲x^۲ - ۱۶x + ۱$

حل:

$$f'(x) = ۰ \Longrightarrow ۶x^۲ - ۴x - ۱۶ = ۰ \longrightarrow ۲(۳x^۲ - ۲x - ۸) = ۰$$

$$\longrightarrow ۲(۳x^۲ - ۲x - ۲۴) = ۰ \longrightarrow ۲(۳x - ۶)(۳x + ۴) = ۰$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} ۳x - ۶ = ۰ \longrightarrow x = ۲ \\ ۳x + ۴ = ۰ \longrightarrow x = -\frac{۴}{۳} \end{cases}$$

۳) $f(x) = x^۴ - ۸x^۲ + ۱۶$

حل:

$$f'(x) = ۴x^۳ - ۱۶x = ۰ \longrightarrow ۴x(x^۲ - ۴) = ۰$$

$$\longrightarrow \begin{cases} ۴x = ۰ \longrightarrow x = ۰ \\ x^۲ - ۴ = ۰ \longrightarrow x = \pm ۲ \end{cases}$$

مثال: نقاط بحرانی تابع $f(x)=\frac{x^{۲}+۱}{x}$ را بیابید.

حل:

$$\acute{y}=\frac{(۲x)(x)-(۱)(x^{۲}+۱)}{x^{۲}}=\frac{x^{۲}-۱}{x^{۲}}=۰$$

$$\to x^{۲}-۱=۰\to x=\pm ۱$$

مثال: نقاط بحرانی تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ را بیابید.

حل:

$\acute{y}=-\frac{۱}{x^{۲}}=۰\to -۱=۰\to$ غ ق ق $\to$. نقطه بحرانی ندارد.

مثال: نقاط بحرانی تابع $f(x)=\frac{۱}{x^{۳}-۶x^{۲}+۹x+۱}$ را بیابید.

حل:

$$\acute{y}=\frac{(۰)(x^{۳}-۶x^{۲}+۹x+۱)-(۳x^{۲}-۱۲x+۹)(۱)}{(x^{۳}-۶x^{۲}+۹x+۱)^{۲}}=۰$$

$$\to -۳x^{۲}+۱۲x-۹=۰\xrightarrow{\div -۳}x^{۲}-۴x+۳=۰$$

$$\to (x-۳)(x-۱)=۰\to\begin{cases}x=۱\\x=۳\end{cases}$$

مثال: نقاط بحرانی تابع $f(x)=\frac{۱}{x^{۴}-۴x^{۳}+۴x^{۲}+۵}$ را بیابید.

حل:

$$\acute{y}=\frac{(۰)(x^{۴}-۴x^{۳}+۴x^{۲}+۵)-(۴x^{۴}-۱۲x^{۲}+۸x)(۱)}{(x^{۴}-۴x^{۳}+۴x^{۲}+۵)^{۲}}=۰$$

$$\to ۴x^{۳}-۱۲x^{۲}+۸x=۰\to ۴x(x^{۲}-۳x+۲)=۰$$

$$\rightarrow \begin{cases} (x-۱)(x-۲)=۰ \rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=۲ \end{cases} \\ ۴x=۰ \ \rightarrow x=۰ \end{cases}$$

تست: تابع $y=\frac{x}{x^۲-۱}$ چند نقطه بحرانی دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۵

حل: گزینه۱

$$\acute{y}=\frac{(۱)(x^۲-۱)-(۲x)(x)}{(x^۲-۱)^۲}=\frac{-x^۲-۱}{(x^۲-۱)^۲}=۰$$

$\rightarrow -x^۲-۱=۰ \rightarrow -۱=x^۲$ غ ق ق

مثال: نقاط بحرانی تابع $y=(x^۲-۳x+۲)e^x$ را به دست آورید.

حل: همواره e^u مثبت است. در توابع e^u معمولاً پس از مشتق گیری از e^u فاکتور می گیریم تا عبارت ساده شود.

$$\acute{y}=(۲x-۳)(e^x)+(x^۲-۳x+۲)(e^x)$$
$$=(e^x)(۲x-۳+x^۲-۳x+۲)=e^x(x^۲-x-۱)=۰$$
$$x^۲-x-۱=۰ \rightarrow \Delta=(-۱)^۲-۴(۱)(-۱)=۵ \rightarrow x=\frac{۱\pm\sqrt{۵}}{۲}$$

مثال: نقاط بحرانی تابع $y=e^{-x}$ را به دست آورید.

حل:

$\acute{y}=-e^{-x}$ نقطه بحرانی ندارد

مثال: نقاط بحرانی تابع $y=\frac{e^x}{x^۲}$ را به دست آورید.

حل:

$$\acute{y} = \frac{e^x(x^۲) - (۲x)e^x}{x^۴} = \frac{e^x(x^۲ - ۲x)}{x^۴} = ۰$$

$$\rightarrow \underbrace{e^x}_{\text{همواره مثبت}} (x^۲ - ۲x) = ۰ \rightarrow x^۲ - ۲x = ۰$$

$$\rightarrow x(x - ۲) = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۲ \end{cases}$$

نکته:

*مشتق $y = a^u$ برابر است با $\acute{y} = \acute{u}a^u \ln a$

*

$$\ln a \begin{cases} a > ۱ \rightarrow \text{همواره مثبت} \\ ۰ < a < ۱ \rightarrow \text{همواره منفی} \end{cases}$$

مثال: نقاط بحرانی تابع $y = ۲^{x^۳ - ۱۲x}$ را به دست آورید.

حل: همواره e^u مثبت است و طبق نکات بالا داریم:

$$\acute{y} = (۳x^۲ - ۱۲)۲^{x^۳ - ۱۲x} \ln ۲ = ۰$$

$$\rightarrow ۳x^۲ - ۱۲ = ۰ \rightarrow x^۲ = ۴ \rightarrow x = \pm ۲$$

تذکر: در توابع $\ln u$ ابتدا دامنهٔ $\ln$ را به دست می آوریم.(برای به دست آوردن دامنه $\ln u$ باید u را بزرگتر از صفر قرار دهیم.)

مثال: نقاط بحرانی تابع $y = \ln(x^۲ - ۱)$ را به دست آورید.

حل:

$$x^۲ - ۱ > ۰ \rightarrow \text{تعیین علامت می کنیم} \rightarrow D_f = (-\infty, -۱) \cup (۱, \infty)$$

www.riazikade.ir حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ @eshgheriazikonkour

$\acute{y} = \frac{۲x}{x^۲ - ۱} = ۰ \rightarrow x = ۰$ غ ق ق

مثال: تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x) = \sqrt{۱ - x^۲}$ را به دست آورید.

تذکر: در توابع رادیکالی با فرجه زوج ابتدا دامنه را بدست می آوریم (عبارت زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار می دهیم).

$۱ - x^۲ \geq ۰ \rightarrow$ تعیین علامت می کنیم

x		-۱		۱	
$۱ - x^۲$	$-$	۰	$+$	۰	$-$

$D_f = [-۱,۱]$

$\acute{f}(x) = \frac{-۲x}{۲\sqrt{۱ - x^۲}} = \frac{-x}{\sqrt{۱ - x^۲}}$

$\{-x = ۰ \rightarrow x = ۰$ بحرانی

تست: نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x) = x\sqrt{۲ - x^۲}$ کدام است؟

۱) $\{۱, -۱\}$ ۲) $\{\pm\sqrt{۲}, \pm۱\}$ ۳) $\{\pm\sqrt{۲}\}$ ۴) $\{۰, ۱, -۱\}$

حل: گزینه ۱

$۲ - x^۲ \geq ۰ \rightarrow ۲ - x^۲ = ۰, x^۲ = ۲ \rightarrow x = \pm\sqrt{۲}$

x	$-\infty$	$-\sqrt{۲}$		$\sqrt{۲}$	$+\infty$
$۲ - x^۲$	$-$	۰	$+$	۰	$-$

$D_f = [-\sqrt{۲}, \sqrt{۲}]$

$$\acute{f}(x) = (۱)(\sqrt{۲-x^۲}) + x\left(\frac{-۲x}{۲\sqrt{۲-x^۲}}\right) = \sqrt{۲-x^۲} - \frac{x^۲}{\sqrt{۲-x^۲}}$$

$$= \frac{۲-x^۲-x^۲}{\sqrt{۲-x^۲}} = \frac{۲-۲x^۲}{\sqrt{۲-x^۲}}$$

$$\rightarrow ۲-۲x^۲ = ۰ \rightarrow x^۲ = ۱ \rightarrow x = \pm ۱$$

مثال: تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x) = x\sqrt{a^۲ - x^۲}$ را به دست آورید.

حل:

$$D_f = [-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$$

$$\acute{f}(x) = (۱)(\sqrt{a^۲-x^۲}) + x\left(\frac{-۲x}{۲\sqrt{a^۲-x^۲}}\right)$$

$$\acute{f}(x) = \sqrt{a^۲-x^۲} - \frac{x^۲}{\sqrt{a^۲-x^۲}} = \frac{a^۲-x^۲-x^۲}{\sqrt{a^۲-x^۲}} = \frac{a^۲-۲x^۲}{\sqrt{a^۲-x^۲}}$$

$$\rightarrow a^۲-۲x^۲ = ۰ \rightarrow x^۲ = \frac{a^۲}{۲} \rightarrow x = \pm\frac{a}{\sqrt{۲}} = \pm\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$$

تست: تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{\sqrt{۱+x^۲}}{x}$ بر روی دامنه خود کدام است؟(سراسری ریاضی ۹۰ خارج از کشور)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی شمار

حل: گزینه ۱

$$D_f = R - \{۰\}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{\frac{(۲x)}{۲\sqrt{۱+x^۲}}(x) - \sqrt{۱+x^۲}}{x^۲} = \frac{\frac{x^۲ - \left(\sqrt{۱+x^۲}\right)^۲}{\sqrt{۱+x^۲}}}{x^۲}$$

$$=\frac{\frac{x^{۲}-۱-x^{۲}}{\sqrt{۱+x^{۲}}}}{x^{۲}}=\frac{-۱}{x^{۲}\sqrt{۱+x^{۲}}}\to -۱=۰$$ غیر ممکن

ویژه صد در صدی ها

مثال: نقاط بحرانی تابع $f(x)=۲-cos\,۲x$ را در بازه ی $[۰,۲\pi]$ به دست آورید.

حل:

$$f'(x)=۲\,sin\,۲x=۰\to ۲x=\frac{۲k\pi}{۲}\to x=\frac{k\pi}{۲}\to\begin{cases}x=۰\\ x=\frac{\pi}{۲}\\ x=\pi\\ x=\frac{۳\pi}{۲}\\ x=۲\pi\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

مثال: نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x)=sin\,۲x+۲\,cos\,x$ را به دست آورید.

حل:

$$f'(x)=۲\,cos\,۲x-۲\,sin\,x=۲(۱-۲sin^{۲}x)-۲\,sin\,x=۰$$

$$۲-۴sin^{۲}x-۲\,sin\,x=۰\xrightarrow{\div(-۲)}۲sin^{۲}x+sin\,x-۱=۰\to\Delta=۹$$

$$\begin{cases}sin\,x=\frac{-۱+۳}{۴}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}\to\begin{cases}x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\\ x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}\end{cases}\\ sin\,x=\frac{-۱-۳}{۴}=-۱\to x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}\end{cases}$$

تمرین: نقاط بحرانی تابع f با ضابطهٔ $f(x)=۱-cos^{۲}x-sin\,x$ را به دست آورید.

مثال: نقاط بحرانی تابع $f(x) = cos^{۲}x - cos\,x$ را در بازه ی $\left[\frac{\pi}{۲}, \frac{۵\pi}{۲}\right]$ به دست آورید.

حل:

$$f'(x) = ۲\cos x \sin x + \sin x = \sin x(۲\cos x + ۱) = ۰$$

$$\begin{cases} \sin x = ۰ \rightarrow x = k\pi \\ \cos x = -\frac{۱}{۲} \end{cases} \Longrightarrow x = \pi, ۲\pi, \frac{۷\pi}{۳}, \frac{۵\pi}{۳}$$

۱.۲ به دست آوردن نقاط بحرانی عبارتهای باتوان کسری

۱.از تابع مشتق می گیریم.

تذکر:

*توان منفی را به مخرج منتقل می کنیم تا مثبت شود، سپس به صورت رادیکالی می نویسیم

*اگر بین عبارات جمع یا تفریق قرار داشت (یعنی دو یا چند کسر داشتیم) با مخرج مشترک گیری به یک کسر تبدیل می کنیم.

۲.صورت و مخرج کسر را جداگانه مساوی صفر قرار می دهیم.

*در عبارات توان کسری با مخرج فرد نیازی به دامنه نیست اما در توان کسری با مخرج زوج دامنهٔ آن را حساب می کنیم.(عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج باید بزرگ تر مساوی صفر باشد.)

مثال: نقاط بحرانی تابع $f(x) = (x^{۲} - ۵x + ۶)^{\frac{۱}{۲}}$ را به دست آورید.

حل:

$$f'(x) = \frac{۱}{۳}(x^۲ - ۵x + ۶)^{\frac{-۲}{۳}}(۲x - ۵)$$

$$= \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{(x^۲ - ۵x + ۶)^{\frac{۲}{۳}}} \times (۲x - ۵)\frac{۲x - ۵}{۳\sqrt[۳]{(x^۲ - ۵x + ۶)^۲}}$$

$$\begin{cases} ۲x - ۵ = ۰ \rightarrow x = \frac{۵}{۲} \\ x^۲ - ۵x + ۶ = ۰ \rightarrow (x - ۲)(x - ۳) = ۰ \rightarrow x = ۲,۳ \end{cases}$$

*در عبارات توان کسری با مخرج فرد نیازی به تعیین دامنه نیست در اینجا چون مخرج کسر$\frac{۱}{۳}$ عدد فردی است نیازی به تعیین دامنه نیست.

مثال: نقاط بحرانی تابع $f(x) = (x^۳ - ۳x^۲ + ۴)^{\frac{۱}{۳}}$را به دست آورید.(تمرین۴ ص۸۶ ریاضی عمومی)

حل:

$$f'(x) = \frac{۱}{۳}(x^۳ - ۳x^۲ + ۴)^{\frac{-۲}{۳}}(۳x^۲ - ۶x) = \frac{۳x^۲ - ۶x}{۳\sqrt[۳]{(x^۳ - ۳x^۲ + ۴)^۲}}$$

$$\begin{cases} ۳x^۲ - ۶x = ۰ \rightarrow ۳x(x - ۲) = ۰ \rightarrow x = ۰,۲ \\ x^۳ - ۳x^۲ + ۴ = ۰ \rightarrow x = -۱,۲ \end{cases}$$

نقاط بحرانی:۲,۰,۱-

مثال: نقاط بحرانی تابع $f(x) = (x + ۱)^{\frac{۲}{۳}}$ را به دست آورید.(تمرین ۸ص۸۷ ریاضی عمومی)

حل:

$$f'(x) = \frac{۲}{۳}(x + ۱)^{\frac{-۱}{۳}}(۱) = \frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x + ۱}}$$

$$\begin{cases} \text{غیر ممکن}\ ۰ = ۲ \\ x + ۱ = ۰ \to x = -۱\ \text{نقطه بحرانی} \end{cases}$$

مثال: نقاط بحرانی تابع $f(x) = ۱ - (x - ۳)^{\frac{۲}{۳}}$ را به دست آورید. (تمرین ۹ص۸۷ ریاضی عمومی)

حل:

$$f'(x) = -\frac{۲}{۳}(x - ۳)^{\frac{-۱}{۳}}(۱) = \frac{-۲}{۳\sqrt[۳]{x - ۳}}$$

$$\begin{cases} \text{غیر ممکن}\ -۲ = ۰ \\ x - ۳ = ۰ \quad \to x = ۳\ \text{نقطه بحرانی} \end{cases}$$

تست: نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^{\frac{۸}{۳}} - x^{\frac{۲}{۳}}$ با دامنهٔ $[-۸,۲۷]$ کدام است؟

۱) $\left\{-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}\right\}$ ۲) $\left\{۰, \frac{۱}{۲}\right\}$ ۳) $\left\{-\frac{۱}{۲}, ۰, \frac{۱}{۲}\right\}$ ۴) $\{۰\}$

حل: گزینه ۳

$$f'(x) = \frac{۸}{۳}x^{\frac{۵}{۳}}(۱) - \frac{۲}{۳}x^{\frac{-۱}{۳}}(۱) = \frac{۸}{۳}x^{\frac{۵}{۳}} - \frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}} = \frac{۸x^{۲} - ۲}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

$$\begin{cases} ۸x^{۲} - ۲ = ۰ \to x^{۲} = \frac{۲}{۸} = \frac{۱}{۴} \to x = \pm\frac{۱}{۲} \\ x = ۰ \end{cases}$$

مثال: نقاط بحرانی تابع $g(x) = x^{\frac{۶}{۵}} - ۱۲x^{\frac{۱}{۵}}$ را به دست آورید.(تمرین۳ ص۸۶ ریاضی عمومی)

حل:

$$\acute{g}(x) = \frac{۶}{۵}x^{\frac{۱}{۵}} - ۱۲\frac{۱}{۵}x^{\frac{-۴}{۵}} = \frac{۶\sqrt[۵]{x}}{۵} - \frac{۱۲}{۵\sqrt[۵]{x^۴}} = \frac{۶x-۱۲}{۵\sqrt[۵]{x^۴}}$$

$$\begin{cases} ۶x - ۱۲ = ۰ \rightarrow x = ۲ \\ x = ۰ \end{cases}$$

مثال: نقاط بحرانی تابع $f(x) = x^{\frac{۷}{۶}} - \frac{۷}{۲}x^{\frac{۲}{۳}} + ۵$ را به دست آورید.(تمرین۵ ص۸۶ ریاضی عمومی)

حل: در عبارات توان کسری با مخرج زوج بایستی دامنه را تعیین کنیم در اینجا چون مخرج کسر $\frac{۷}{۶}$ عدد زوجی است باید دامنه را حساب کنیم.(عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج باید بزرگ تر مساوی صفر باشد.)

چون یکی از جملات تابع f زیر رادیکال با فرجه زوج $(n = ۶)$است. داریم:

$$x^{\frac{۷}{۶}} = \sqrt[۶]{x^۷} \rightarrow x \geq ۰ \rightarrow D_f = [۰,\infty)$$

$$\acute{f}(x) = \frac{۷}{۶}x^{\frac{۱}{۶}} - \frac{۷}{۲} \times \frac{۲}{۳}x^{\frac{-۱}{۳}} = \frac{۷\sqrt[۶]{x}}{۶} - \frac{۷}{۳\sqrt[۳]{x}} = \frac{۷\sqrt{x} - ۱۴}{۶\sqrt[۳]{x}}$$

$$\begin{cases} ۷\sqrt{x} - ۱۴ = ۰ \rightarrow \sqrt{x} = ۲ \rightarrow x = ۴ \\ x = ۰ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

نقطه $x = ۰$ چون ابتدای بازه است نقطه بحرانی محسوب نمی شود.

مثال: نقاط بحرانی تابع $f(x) = x^{\frac{۷}{۶}} - \frac{۷}{۲}x^{\frac{۲}{۳}} + ۵$ را در بازه ی $[۰,۶۴]$ به دست آورید.(تمرین۱۰ص۸۷ ریاضی عمومی)

حل: مشابه مثال قبل

تست: نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^{\frac{۴}{۳}} - x^{\frac{۲}{۳}}$ با دامنهٔ $[-۱,۱]$کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}, \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۲}}{۴}, \frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۳) $-\frac{\sqrt{۲}}{۴}, ۰, \frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}, ۰, \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

حل: گزینه ۳

$$\acute{f}(x)=\frac{۴}{۳}x^{\frac{۱}{۳}}-\frac{۲}{۳}x^{\frac{-۱}{۳}}=\frac{۴\sqrt[۳]{x}}{۳}-\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}=\frac{۴\sqrt[۳]{x^۲}-۲}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

$$\begin{cases}۴\sqrt[۳]{x^۲}-۲=۰\rightarrow\sqrt[۳]{x^۲}=\frac{۱}{۲}\rightarrow x^۲=\frac{۱}{۸}\rightarrow x=\pm\frac{۱}{\sqrt{۸}}=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۴}\\ x=۰\end{cases}$$

تذکر: رادیکالهای با فرجه فرد را به صورت توان کسری می نویسیم سپس آن را حل می کنیم

مثال: تعداد نقاط بحرانی تابع به معادلهٔ $y=x^۲\sqrt[۳]{x^۲}-\sqrt[۳]{x^۲}$ را به دست آورید.

حل:

$$y=x^۲\sqrt[۳]{x^۲}-\sqrt[۳]{x^۲}=x^۲x^{\frac{۲}{۳}}-x^{\frac{۲}{۳}}=x^{\frac{۸}{۳}}-x^{\frac{۲}{۳}}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{۸}{۳}x^{\frac{۵}{۳}}(۱)-\frac{۲}{۳}x^{\frac{-۱}{۳}}(۱)=\frac{۸}{۳}x^{\frac{۵}{۳}}-\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}=\frac{۸x^۲-۲}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

$$\begin{cases}۸x^۲-۲=۰\rightarrow x^۲=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}\rightarrow x=\pm\frac{۱}{۲}\\ x=۰\end{cases}$$

تست: تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x\sqrt[۳]{x}-x^{\frac{۲}{۳}}$ در بازه ی $[-۱,۱]$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

حل: گزینه ۲

$$f(x)=x\sqrt[۳]{x}-x^{\frac{۲}{۳}}=x^{\frac{۴}{۳}}-x^{\frac{۲}{۳}}$$

$$f'(x) = \frac{۴}{۳}x^{\frac{۱}{۳}} - \frac{۲}{۳}x^{\frac{-۱}{۳}} = \frac{۴\sqrt[۳]{x}}{۳} - \frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}} = \frac{۴\sqrt[۳]{x^۲} - ۲}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

$$\begin{cases} ۴\sqrt[۳]{x^۲} - ۲ = ۰ \to \sqrt[۳]{x^۲} = \frac{۱}{۲} \to x^۲ = \frac{۱}{۸} \to x = \pm\frac{۱}{\sqrt{۸}} = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۴} \\ x = ۰ \end{cases}$$

نقاط $x = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۴}, ۰$ نقاط بحرانی هستند.

تست: مجموعه طول های نقـاط بحرانـی تـابع بـا ضـابطهٔ $f(x) = (x^۲ - ۲۸)\sqrt[۳]{x}$ کدام است؟(سراسری تجربی)

۱) $\{-۲,۲\}$ ۲) $\{-\sqrt{۷}, \sqrt{۷}\}$ ۳) $\{-۲,۰,۲\}$ ۴) $\{-۷,۰,۷\}$

حل: گزینه ۳

$$f(x) = (x^۲ - ۲۸)\sqrt[۳]{x} = x^{\frac{۷}{۳}} - ۲۸x^{\frac{۱}{۳}}$$

$$f'(x) = \frac{۷}{۳}x^{\frac{۴}{۳}} - ۲۸ \times \frac{۱}{۳}x^{\frac{-۲}{۳}} = \frac{۷\sqrt[۳]{x^۴}}{۳} - \frac{۲۸}{۳\sqrt[۳]{x^۲}} = \frac{۷x^۲ - ۲۸}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}$$

$$\begin{cases} ۷x^۲ - ۲۸ = ۰ \to x^۲ = ۴ \to \boxed{x = \pm ۲} \\ \boxed{x = ۰} \end{cases}$$

۱,۳ به دست آوردن نقاط بحرانی توابع چندضابطه ای

۱. از تابع مشتق می گیریم و هر یک از ضابطه ها را جداگانه مساوی صفر قرار می دهیم اگر نقطهٔ به دست آمده در بازه ی مورد نظر بود یک نقطهٔبحرانی است.

۲. نقاط مرزی را از نظر پیوستگی و مشتق پذیری بررسی مـی کنیم.(اگـر تـابع درنقطـهٔ مرزی ناپیوسته باشد درآن نقطه مشتق وجود ندارد پس بحرانی است. اگر پیوسته باشـد به سراغ مشتق چپ و راست می رویم در صورتی نقطه بحرانی است کـه مشـتق چـپ و راست با هم برابر نباشند.)

مثال: مجموعه طول های نقاط بحرانی تابع $f(x) = \begin{cases} x & ,-۱ \le x < ۰ \\ ۲x^۲ - x & ,۰ \le x < ۱ \end{cases}$ را بیابید.

حل:

$$f'(x) = \begin{cases} ۱ & ,-۱ < x < ۰ \\ ۴x - ۱ & ,۰ < x < ۱ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ۱ \neq ۰ \\ ۴x - ۱ = ۰ \rightarrow x = \frac{۱}{۴} \in [۰,۱] \end{cases}$$

در $x = \frac{۱}{۴}$ مشتق صفر می شود پس بحرانی است.

پیوستگی در نقاط مرزی $\begin{cases} \lim\limits_{x \to ۰^+} (۲x^۲ - x) = ۰ \\ \lim\limits_{x \to ۰^-} (x) = ۰ \quad \rightarrow \text{پیوسته است} \\ f(۰) = ۰ \end{cases}$

مشتق پذیری در نقاط مرزی $\begin{cases} ۱ & -۱ < x < ۰ \\ ۴x - ۱ & ۰ < x < ۱ \end{cases}$

در $x = ۰$ مشتق ناپذیر است پس بحرانی است $f'_+(۰) = -۱, \quad f'_-(۰) = ۱ \rightarrow$

مجموعه نقاط بحرانی= $\left\{\frac{۱}{۴}, ۰\right\}$

۱,۴ پیدا کردن نقاط بحرانی توابع قدرمطلقی

ابتدا تابع قدر مطلقی را به صورت یک تابع چند ضابطه ای می نویسیم سپس مانند توابع چندضابطه ای حل می کنیم

مثال: مجموعه طول های نقاط بحرانی تابع $f(x) = x^۲ + |x|$ را بیابید.

حل:

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ + x & ,x \ge ۰ \\ x^۲ - x & ,x < ۰ \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}2x+1 & ,x>0\\ 2x-1 & ,x<0\end{cases}$$

$$\to\begin{cases}2x+1=0\to x=\dfrac{-1}{2} & \text{غ ق ق}\\ 2x-1=0\to x=\dfrac{1}{2} & \text{غ ق ق}\end{cases}$$

بررسی نقطه مرزی $x=0$

پیوستگی در نقاط مرزی $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2-x)=0\\ \lim\limits_{x\to 0^-}(x^2-x)=0\\ f(0)=0\end{cases}\to$ پیوسته است

مشتق پذیری در نقاط مرزی $f'(x)=\begin{cases}2x+1 & ,x>0\\ 2x-1 & ,x<0\end{cases}$

در $x=0$ مشتق ناپذیر است پس بحرانی است $f'_+(0)=+1,\ f'_-(0)=-1\to$

$x=0\to$ نقطه بحرانی $=\{0\}$

تست: تابع $y=|x^2-5x+6|$ چند نقطه بحرانی دارد؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۰

حل: گزینه ۱

راه حل اول: ابتدا تابع قدرمطلقی را به تابع چند ضابطه ای تبدیل می کنیم.

$$x^2-5x+6=0\to(x-3)(x-2)=0\to x=2,3$$

x		2		3	
x^2-5x+6	$+$	0	$-$	0	$+$

$$y=\begin{cases}-x^2+5x-6 & 2\le x\le 3\\ x^2-5x+6 & x>3 \text{ یا } x<2\end{cases}$$

$$\acute{y}=\begin{cases}-۲x+۵ & ۲<x<۳\\ ۲x-۵ & x>۳ \text{ یا } x<۲\end{cases} \to \begin{array}{l}-۲x+۵=۰\to x=\frac{۵}{۲} \text{ ق ق}\\ ۲x-۵=۰\to x=\frac{۵}{۲} \text{ ق ق}\end{array}$$

$\acute{f}(۳^+)=۱$, $\acute{f}(۳^-)=-۱$ مشتق وجود ندارد , $\acute{f}(۲^+)=۱$, $\acute{f}(۲^-)=-۱$ مشتق وجود ندارد

$\frac{۵}{۲}$, ۲,۳ نقاط بحرانی هستند.

راه حل دوم:

$$\begin{cases}y=x^۲-۵x+۶=۰\to (x-۳)(x-۲)=۰\to x=۲,۳\\ y=x^۲-۵x+۶\xrightarrow{\acute{y}}۲x-۵=۰\to x=\frac{۵}{۲}\end{cases}$$

۱,۴,۱ حالات خاص به دست آوردن نقاط بحرانی توابع قدرمطلقی

حالت اول: برای به دست آوردن نقاط بحرانی تابع $y=|f(x)|$ یک بار عبارت داخل قدرمطلق و یک بار مشتق داخل قدرمطلق را مساوی با صفر قرار می دهیم.

حالت دوم : برای پیدا کردن تعداد نقاط بحرانی تابع $y=f(x)|g(x)|$ کافی است یک بار ریشه های داخل قدرمطلق را پیدا کنیم یعنی $g(x)=۰$ ، و بار دیگر قدرمطلق را برداریم و از $(f(x).g(x))$ مشتق بگیریم و نقاط بحرانی را به دست بیاوریم.

تست: تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x^۳-x|$ روی بازه ی $[-۱,۲]$ کدام است؟(سراسری ریاضی ۹۰)

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۶

حل: گزینه ۳

$$\begin{cases} f(x)=\cdot \\ f'(x)=\cdot \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{۳}-x=x(x^{۲}-۱)=\cdot \rightarrow x=\cdot,۱,-۱ \\ ۳x^{۲}-۱=\cdot \rightarrow x^{۲}=\frac{۱}{۳} \rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳} \end{cases}$$

۱- اول بازه است قابل قبول نیست.

تست: تعداد نقاط بحرانی تابع f با ضابطه $f(x)=|\sin x|$ بر بازه ی $\left(-\frac{\pi}{۲},\frac{۵\pi}{۲}\right)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

حل: گزینه ۴

$$\begin{cases} f(x)=\cdot \\ f'(x)=\cdot \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x=\cdot \rightarrow x=\cdot,\pi,۲\pi \\ \cos x=\cdot \rightarrow x=\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲} \end{cases}$$

تست: تابع $f(x)=x|x-۲|$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

حل: گزینه ۳

راه حل اول: ابتدا تابع قدرمطلقی را به تابع چند ضابطه ای تبدیل می کنیم.

$x-۲=\cdot \rightarrow x=۲$

x	$-\infty$	۲	$+\infty$
x-۲	$-$	۰	$+$

$$f(x)=x|x-۲|=\begin{cases} x(x-۲)=x^{۲}-۲x & ,x\geq ۲ \\ x\big(-(x-۲)\big)=-x^{۲}+۲x & ,x<۲ \end{cases}$$

$$\acute{y} = \begin{cases} ۲x - ۲ & , x \geq ۲ \\ -۲x + ۲ & , x < ۲ \end{cases}$$

$$\acute{y} = \begin{cases} ۲x - ۲ = ۰ \rightarrow x = ۱ \text{ غ ق ق } \text{(جزء دامنه نیست)} \\ -۲x + ۲ = ۰ \rightarrow x = ۱ \text{ ق ق} \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \acute{f}(۲^+) = ۲ \\ \acute{f}(۲^-) = -۲ \end{matrix} \rightarrow x = ۲ \text{ نقطه بحرانی}$$

راه حل دوم:

$$\begin{cases} x - ۲ = ۰ \rightarrow x = ۲ \\ y = x(x-۲) = x^۲ - ۲x \xrightarrow{\acute{y}} ۲x - ۲ = ۰ \rightarrow x = ۱ \end{cases}$$

تست: تابع $f(x) = x|x^۲ - ۲|$ در دامنهٔ $[-۲,۲]$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟(سراسری ریاضی ۸۷ خارج از کشور)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

حل: گزینه ۲

$$\begin{cases} x^۲ - ۲ = ۰ \rightarrow x^۲ = ۲ \rightarrow x = \pm\sqrt{۲} \\ y = x(x^۲ - ۲) = x^۳ - ۲x \xrightarrow{\acute{y}} ۳x^۲ - ۲ = ۰ \rightarrow x^۲ = \frac{۲}{۳} \rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{۶}}{۳} \end{cases}$$

تست: مجموعه طول های نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x) = |x-۲|\sqrt[۳]{x^۲}$ کدام است؟(سراسری ریاضی۸۵)

۱) $\left\{۰, \frac{۴}{۵}, ۲\right\}$ ۲) $\left\{۰, \frac{۲}{۳}, ۲\right\}$ ۳) $\{۰, ۱۱\}$ ۴) $\left\{\frac{۲}{۳}, ۲\right\}$

حل: گزینه ۱

$x - ۲ = ۰ \rightarrow x = ۲$ یک نقطه بحرانی $x = ۲$

$$f(x) = (x-۲)x^{\frac{۲}{۳}} = x^{\frac{۵}{۳}} - ۲x^{\frac{۲}{۳}}$$

$$\rightarrow \ f'(x) = \frac{۵}{۳}x^{\frac{۲}{۳}} - ۲ \times \frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}} = \frac{۵x - ۴}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} ۵x - ۴ = ۰ \\ ۳\sqrt[۳]{x} = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۴}{۵} \\ ۳\sqrt[۳]{x} = ۰ \rightarrow x = ۰ \end{cases}$$

www.riazikade.ir حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ @eshgheriazikonkour

۱،۵ ماکزیمم ومینیمم مطلق توابع

برای به دست آوردن اکسترمم های مطلق یک تابع در بازه $[a,b]$ مراحل زیر را انجام می دهیم

۱.نقاط بحرانی تابع را به دست می آوریم.(نقاطی را که خارج از بازه هستند را حذف می کنیم.)

۲.مقادیر تابع را در نقاط بحرانی و نقاط مرزی(لبه ها) به دست می آوریم.($f(a), f(b), f\left(\text{بحرانی}\right)$

۳.مقادیر به دست آمده را در مرحلهٔ۲ با هم مقایسه می کنیم آن که از همه بزرگتر است ماکزیمم مطلق و آن که از همه کوچکتر است می نیمم مطلق است.

برد تابع= [ماکزیمم مطلق , مینیمم مطلق]

مثال: ماکزیمم مطلق و می نیمم مطلق تابع $f(x) = x^۳ - ۳x + ۳$ را در بازه ی $[-۲,۲]$ را به دست آورید.

حل:

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۳ = ۰ \rightarrow x^۲ = ۱ \rightarrow x = \pm ۱ \rightarrow \begin{cases} x = ۱ \text{ ق ق} \\ x = -۱ \text{ ق ق} \end{cases}$$

$$f\left(\text{بحرانی}\right) = f(۱) = ۱\ min$$
$$f\left(\text{بحرانی}\right) = f(-۱) = ۵ max$$

$$f\left(\text{اول بازه}\right) = f(-۲) = ۱ min$$
$$f\left(\text{آخر بازه}\right) = f(۲) = ۵\ max$$

بردتابع= $[۱,۵]$

تست: مجموع ماکزیمم و می نیمم مطلق تابع $f(x)=x^{۲}$ در فاصلهٔ $[-۱,۲]$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۱

حل: گزینه ۲

$$f'(x)=۲x=\cdot\rightarrow x=\cdot$$

$$\begin{cases} f(\text{اول بازه})=f(-۱)=۱ \\ f(\text{آخر بازه})=f(۲)=۴\ max \Rightarrow max+min=۴+\cdot=۴ \\ f(\text{بحرانی})=f(\cdot)=\cdot\ min \end{cases}$$

تست: می نیمم مطلق تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^{۴}}{۴}-\frac{x^{۳}}{۳}-x^{۲}$ روی بازه ی $[-۱,۳]$ کدام است؟(سراسری تجربی ۸۶)

۱) $-\frac{۱۱}{۳}$ ۲) $-\frac{۱۰}{۳}$ ۳) $-\frac{۸}{۳}$ ۴) $-\frac{۷}{۳}$

حل: گزینه ۳

$$f'(x)=x^{۳}-x^{۲}-۲x=\cdot\rightarrow x(x^{۲}-x-۲)=\cdot$$

$$\rightarrow x(x-۲)(x+۱)=\cdot\rightarrow\begin{cases} x=\cdot \\ x=۲ \\ x=-۱ \end{cases}$$

$$f(\text{بحرانی})=f(\cdot)=\cdot$$

$$f(\text{بحرانی})=f(۲)=-\frac{۸}{۳}\ \text{می نیمم مطلق}$$

$$f(\text{اول بازه})=f(-۱)=-\frac{۵}{۱۲}$$

$$f(\text{آخر بازه})=f(۳)=\frac{۹}{۴}$$

مثال: ماکزیمم مطلق تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^۴ - ۲x^۲ + ۳$ روی بازه ی $[-۱,۲]$ را به دست آورید.

حل: ماکزیمم مطلق تابع برابر است با ۱۱

$$f'(x) = ۴x^۳ - ۴x = ۰ \rightarrow x(x^۲ - ۴) = ۰ \rightarrow x = ۰, \pm ۲$$

$$f\left(\text{بحرانی}\right) = f(۰) = ۳$$

$$f\left(\text{اول بازه}\right) = f(-۱) = ۵$$

$$f\left(\text{آخر بازه}\right) = f(۲) = ۱۱$$

تست: کم ترین مقدار تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^۳ - ۳x^۲ - ۹x$ روی بازه ی $[۱,۴]$ کدام است؟

۱) -۲۷ ۲) -۲۴ ۳) -۲۰ ۴) -۱۱

حل: گزینه ۱

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۶x - ۹ = ۰ \xrightarrow{\div ۳} x^۲ - ۲x - ۳ = ۰$$

$$\rightarrow (x - ۳)(x + ۲) = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = ۳ \\ x = -۲ \end{cases}$$

$$f\left(\text{بحرانی}\right) = f(۳) = -۲۷\ min$$

$$f\left(\text{اول بازه}\right) = f(۱) = -۱۱$$

$$f\left(\text{آخر بازه}\right) = f(۴) = -۲۰$$

تست: بیشترین مقدار تابع $y = x^۳ - ۳x^۲ - ۹x + ۵$ در بازه ی $[-۲,۲]$ کدام است؟(سراسری تجربی۹۲)

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۷

حل: گزینه ۲

$$\acute{y} = ۳x^{۲} - ۶x - ۹ = ۰ \xrightarrow{\div ۳} x^{۲} - ۲x - ۳ = ۰$$

$$\rightarrow (x - ۳)(x + ۱) = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = ۳ & \text{غ ق ق} \\ x = -۱ & \text{ق ق} \end{cases}$$

$$f\left(\text{اول بازه}\right) = f(-۲) = ۳$$

$$f\left(\text{بحرانی}\right) = f(-۱) = ۱۰\ max \quad , \quad f\left(\text{آخر بازه}\right) = f(۲) = -۱۷$$

تست: مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع با ضابطه $f(x) = \frac{۱}{۳}x^{۳} - x^{۲} - ۱۵x$ در بازه ی $[-۴,۳]$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۵)

۱) ۱۸- و ۲۴   ۲) ۴۵- و ۲۷   ۳) ۳۶- و ۲۷   ۴) ۲۷- و ۳۶

حل: گزینه۲

تست: ماکزیمم مطلق تابع با ضابطهٔ $y = \frac{۲x}{۱+x^{۲}}$ روی بازه ی $[-۱,۲]$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۵}$ ۲) $\frac{۵}{۴}$ ۳) ۱   ۴) ۱-

حل: گزینه ۳

$$\acute{y} = \frac{(۲)(۱ + x^{۲}) - (۲x)(۲x)}{(۱ + x^{۲})^{۲}} = \frac{۲ - ۲x^{۲}}{(۱ + x^{۲})^{۲}} = ۰$$

$$\rightarrow ۲ - ۲x^{۲} = ۰ \rightarrow x^{۲} = ۱ \rightarrow x = \pm ۱$$

$$\begin{cases} \boxed{f\left(\text{بحرانی}\right) = f(۱) = ۱}\ max \\ f\left(\text{اول بازه}\right) = f(-۱) = -۱ \\ f\left(\text{آخر بازه}\right) = f(۲) = \frac{۴}{۵} \end{cases}$$

مثال: بیشترین مقدار تابع با ضابطهٔ $y = \frac{۱}{۱+x^۲}$ روی بازه ی $[-۲,۳]$ را به دست آورید.

حل:

$$\acute{y} = \frac{(۰)(۱+x^۲) - (۲x)(۱)}{(۱+x^۲)^۲} = \frac{-۲x}{(۱+x^۲)^۲} = ۰$$

$$\rightarrow -۲x = ۰ \rightarrow x = ۰$$

$$\begin{cases} \boxed{f\left(\text{بحرانی}\right) = f(۰) = ۱} \; max \\ f\left(\text{اول بازه}\right) = f(-۲) = \frac{۱}{۵} \\ f\left(\text{آخر بازه}\right) = f(۳) = \frac{۱}{۱۰} \end{cases}$$

تست: مقدار ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = x\sqrt{۱-x^۲}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

حل: گزینه۲

$$D_f = ۱ - x^۲ \geq ۰ \rightarrow (۱-x)(۱+x) \geq ۰ \rightarrow D_f = [-۱,۱]$$

x	$-\infty$	-۱		۱	∞
$۱-x^۲$	$-$	۰	$+$	۰	$-$

$$\acute{f}(x) = (۱)\sqrt{۱-x^۲} + x\frac{-۲x}{۲\sqrt{۱-x^۲}} = \frac{۱-x^۲-x^۲}{\sqrt{۱-x^۲}} = \frac{۱-۲x^۲}{\sqrt{۱-x^۲}} = ۰$$

$$۱-۲x^۲ = ۰ \rightarrow x^۲ = \frac{۱}{۲} \rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$f\left(\text{بحرانی}\right) = f\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\sqrt{۱-\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۲} \; max$$

$$f\left(\text{بحرانی}\right)=f\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)=\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\sqrt{۱-\frac{۱}{۲}}=-\frac{۱}{۲}$$

$$f\left(\text{اول بازه}\right)=f(-۱)=۰,f\left(\text{آخر بازه}\right)=f(۱)=۰$$

تست: اختلاف ماکزیمم و می نیمم مطلق تابع $y=x\sqrt{۲-x^۲}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

حل: گزینه۲

$$D_f=۲-x^۲\geq ۰\rightarrow(\sqrt{۲}-x)(\sqrt{۲}+x)\geq ۰\rightarrow D_f=[-\sqrt{۲},\sqrt{۲}]$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{۲}$		$\sqrt{۲}$		∞
$۲-x^۲$	$-$	۰	$+$	۰	$-$	

$$f'(x)=(۱)\sqrt{۲-x^۲}+x\frac{-۲x}{۲\sqrt{۲-x^۲}}=\frac{۲-x^۲-x^۲}{\sqrt{۲-x^۲}}=\frac{۲-۲x^۲}{\sqrt{۲-x^۲}}=۰$$

$$۲-۲x^۲=۰\rightarrow x^۲=۲\rightarrow x=\pm۱$$

$$f\left(\text{بحرانی}\right)=f(۱)=(۱)\sqrt{۲-۱}=۱$$

$$f\left(\text{بحرانی}\right)=f(-۱)=(-۱)\sqrt{۲-۱}=-۱$$

$$f\left(\text{اول بازه}\right)=f(-\sqrt{۲})=۰,f\left(\text{آخر بازه}\right)=f(\sqrt{۲})=۰$$

$$max-min=۱-(-۱)=۲$$

تست: به ازای کدام مقدار a می نیمم مطلق تابع $y=ax\sqrt{۱-x^۲}$ برابر $-\sqrt{۲}$ است؟

۱) $\pm\sqrt{۲}$ ۲) $\pm۲\sqrt{۲}$ ۳) $\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\pm\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$

حل: گزینه۲

$$D_f = ۱ - x^۲ \geq \cdot \to (۱ - x)(۱ + x) \geq \cdot \to D_f = [-۱,۱]$$

x	$-\infty$	-۱	۱	∞
$۱ - x^۲$	$-$		$+$	$-$

$$f'(x) = (a)\sqrt{۱ - x^۲} + (ax)\frac{-۲x}{۲\sqrt{۱ - x^۲}}$$

$$= \frac{a - ax^۲ - ax^۲}{\sqrt{۱ - x^۲}} = \frac{a(۱ - ۲x^۲)}{\sqrt{۱ - x^۲}} = \cdot$$

$۱ - ۲x^۲ = \cdot \to x^۲ = \frac{۱}{۲} \to x = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ نقاط بحرانی

$$f\left(\text{بحرانی}\right) = f\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) = \left(\frac{a\sqrt{۲}}{۲}\right)\sqrt{۱ - \frac{۱}{۲}} = \frac{a}{۲}$$

$$f\left(\text{بحرانی}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) = \left(-\frac{a\sqrt{۲}}{۲}\right)\sqrt{۱ - \frac{۱}{۲}} = -\frac{a}{۲}$$

$$f\left(\text{اول بازه}\right) = f(-۱) = \cdot, f\left(\text{آخر بازه}\right) = f(۱) = \cdot$$

با توجه به منفی یا مثبت بودن a یکی از اعداد $-\frac{a}{۲}$ یا $\frac{a}{۲}$ می نیمم مطلق تابع f است.

$$\pm\frac{a}{۲} = \sqrt{۲} \to a = \pm ۲\sqrt{۲}$$

مثال: ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = x\sqrt{a^۲ - x^۲}$ را که در آن $-a \leq x \leq a$ و a مقدار مثبتی است را پیدا کنید.(مثال ص ۸۶ ریاضی عمومی).

حل:

www.riazikade.ir حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ @eshgheriazikonkour

$$f'(x) = (1)\sqrt{a^2 - x^2} + (x)\frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{a^2 - x^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0$$

$$\to a^2 - 2x^2 = 0 \to x^2 = \frac{a^2}{2} \to x = \pm\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$f\left(\text{بحرانی}\right) = f\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a^2}{2}$$

$$f\left(\text{اول بازه}\right) = f(-a) = 0 \,, f\left(\text{آخر بازه}\right) = f(a) = 0$$

با توجه به مثبت بودن a این تابع در $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ ماکزیمم مطلق و در $x = -\frac{a\sqrt{2}}{2}$ می نیمم مطلق دارد.

نکته کنکوری: هرگاه سوال ماکزیمم و می نیمم مطلق را از ما بخواهد و بازه ای به ما نداده باشد ابتدا دامنه را به دست می آوریم،اگر دامنه به صورت بازه های بی کران $\pm\infty$ باشد، در این صورت $f(\pm\infty)$ را حساب می کنیم.

۱.اگرجواب $f(\pm\infty)$ از همهٔ مقادیر به دست آمده بزرگ تر باشد، ماکزیمم مطلق « وجود ندارد».

۲. اگرجواب $f(\pm\infty)$از همهٔ مقادیر به دست آمده کوچک تر باشد، می نیمم مطلق « وجود ندارد».

تست :کمترین مقدارتابع $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2$ کدام است ؟(سراسری تجربی ۹۲ خارج)

۱) -36 ۲) -32 ۳) -24 ۴) -18

حل: گزینه۲

در این سوال چون بازه ای به ما نداده است ابتدا دامنه را به دست می آوریم.

$$\text{دامنه} = (-\infty, +\infty)$$

$$f'(x) = x^۳ - ۳x^۲ - ۴x = ۰ \rightarrow x(x^۲ - ۳x - ۴) = ۰$$

$$\rightarrow x(x - ۴)(x + ۱) = ۰ \rightarrow x = ۰, -۱, ۴$$

$$f\left(\text{بحرانی}\right) = f(۰) = ۰ \text{و} f\left(\text{بحرانی}\right) = f(-۱) = -\frac{۳}{۴}$$

$$f\left(\text{بحرانی}\right) = f(۴) = -۳۲$$

$$f\left(\text{اول بازه}\right) = f(-\infty) = \frac{۱}{۴}(-\infty)^۴ = +\infty$$

$$f\left(\text{آخر بازه}\right) = f(+\infty) = \frac{۱}{۴}(+\infty)^۴ = +\infty$$

تست : در سوال قبل بیشترین مقدار کدام است؟

۱) ۰ ۲) $+\infty$ ۳) ۳۲ ۴) وجود ندارد

حل: گزینه۴

با توجه به نکته چون قبل $f(+\infty) = \frac{۱}{۴}(+\infty)^۴ = +\infty$ و از همه مقادیر به دست آمده بزرگتر است پس بیشترین مقدار وجود ندارد.(دقت کنیم ∞ یک نماد است یک عدد نیست.)

تست: ماکزیمم مطلق تابع با ضابطهٔ $y = \frac{۱}{x^۴ - ۴x^۳ + ۴x^۲ + ۵}$ کدام است؟(سراسری تجربی۸۵)

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

حل: گزینه ۲

چون بازه ای به ما نداده ابتدا دامنه را به دست می آوریم:

$$\text{دامنه} \rightarrow (-\infty,+\infty) - \{\text{ریشه های مخرج}\}$$

$$\acute{y} = \frac{(۰)(x^۴ - ۴x^۳ + ۴x^۲ + ۵) - (۴x^۳ - ۱۲x^۲ + ۸x)(۱)}{(x^۴ - ۴x^۳ + ۴x^۲ + ۵)^۲}$$

$$= \frac{-۴x^۳ + ۱۲x^۲ - ۸x}{(x^۴ - ۴x^۳ + ۴x^۲ + ۵)^۲} = ۰$$

$$\rightarrow -۴x^۳ + ۱۲x^۲ - ۸x = ۰ \xrightarrow{\div -۴} x^۳ - ۳x^۲ + ۲x = ۰$$

$$\rightarrow x(x^۲ - ۳x + ۲) = ۰ \rightarrow x(x-۲)(x-۱) = ۰ \longrightarrow x = ۰,۲,۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f\left(\text{بحرانی}\right) = f(۰) = \frac{۱}{۵}, f\left(\text{اول بازه}\right) = f(-\infty) = \frac{۱}{(-\infty)^۴} = \frac{۱}{+\infty} = ۰ \\ f\left(\text{بحرانی}\right) = f(۲) = \frac{۱}{۵}, f\left(\text{آخر بازه}\right) = f(+\infty) = \frac{۱}{(+\infty)^۴} = \frac{۱}{+\infty} = ۰ \\ f\left(\text{بحرانی}\right) = (۱) = \frac{۱}{۶} \end{cases}$$

مثال : در سوال قبل می نیمم مطلق را به دست آورید.

حل: چون مقدار به دست آمده ی $f(\pm\infty)$ ازتمام مقادیر کوچکتر است پس می نـیمم مطلق وجود ندارد.

تست: کم ترین مقدار تابع تابع $f(x) = \sqrt{x^۲ + ۴x - ۱۲}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۶ ۳) ۲ ۴) وجود ندارد

حل: گزینه۱

$$D_f = x^۲ + ۴x - ۱۲ \geq ۰ \rightarrow (x+۶)(x-۲) \geq ۰$$

$\rightarrow D_f = (-\infty, -۶] \cup [۲, +\infty)$

x		-۶		۲	
$x^۲ + ۴x - ۱۲$	$+$	۰	$-$	۰	$+$

$$\acute{f}(x) = \frac{۲x + ۴}{۲\sqrt{x^۲ + ۴x - ۱۲}} = ۰$$

$\rightarrow ۲x + ۴ = ۰ \rightarrow x = -۲$ جزء دامنه نیست

$f\left(\text{اول بازه}\right) = f(۲) = \sqrt{۴ + ۸ - ۱۲} = ۰$

$f\left(\text{آخر بازه}\right) = f(-۶) = \sqrt{۳۶ - ۲۴ - ۱۲} = ۰$

$f\left(\text{اول بازه}\right) = f(-\infty) = \sqrt{(-\infty)^۲} = \sqrt{+\infty} = +\infty$

$f\left(\text{اخر بازه}\right) = f(+\infty) = \sqrt{(+\infty)^۲} = \sqrt{+\infty} = +\infty$

مثال : در سوال قبل بیشترین مقدار را به دست آورید.

حل: چون $f(\pm\infty)$ از تمام مقادیر به دست آمده بزرگتر است پس بیشترین مقدار وجود ندارد.

مثال: ماکزیمم مطلق تابع $y = (x - ۱)x^{\frac{۲}{۳}}$ در بازه ی $[-۱,۱]$ را به دست آورید.

حل:

$$y = (x - ۱)x^{\frac{۲}{۳}} = x^{\frac{۵}{۳}} - x^{\frac{۲}{۳}}$$

$$\acute{y} = \frac{۵}{۳}x^{\frac{۲}{۳}} - \frac{۲}{۳}x^{\frac{-۱}{۳}} = \frac{۵\sqrt[۳]{x^۲}}{۳} - \frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}} = \frac{۵x - ۲}{۳\sqrt[۳]{x}} = ۰$$

$$\rightarrow ۵x - ۲ = ۰ \rightarrow x = \frac{۲}{۵}$$

$$۳\sqrt[۳]{x} = ۰ \rightarrow x = ۰, f\left(\text{بحرانی}\right) = f(۰) = ۰$$

$$f\left(\text{بحرانی}\right) = f\left(\frac{۲}{۵}\right) = \left(\frac{۲}{۵} - ۱\right)\left(\frac{۲}{۵}\right)^{\frac{۲}{۳}} = \left(-\frac{۳}{۵}\right)\sqrt[۳]{\frac{۴}{۲۵}}$$

$$f\left(\text{اول بازه}\right) = f(-۱) = (-۱ - ۱)(-۱)^{\frac{۲}{۳}} = -۲$$

$$f\left(\text{آخر بازه}\right) = f(۱) = (۱ - ۱)۱^{\frac{۲}{۳}} = ۰ \;\; max$$

مثال: ماکزیمم و می نیمم مطلق تابع $f(x) = x^{\frac{۸}{۳}} - x^{\frac{۲}{۳}}$ با دامنهٔ $[-۸,۲۷]$ را به دست آورید. (مثال ص۸۵ ریاضی عمومی)

حل:

$$f'(x) = \frac{۸}{۳}x^{\frac{۵}{۳}} - \frac{۲}{۳}x^{\frac{-۱}{۳}} = \frac{۸\sqrt[۳]{x^۵}}{۳} - \frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}} = \frac{۸x^۲ - ۲}{۳\sqrt[۳]{x}} = ۰$$

$$\rightarrow ۸x^۲ - ۲ = ۰ \rightarrow x^۲ = \frac{۱}{۴} \rightarrow x = \pm\frac{۱}{۲}$$

$$۳\sqrt[۳]{x} = ۰ \rightarrow x = ۰$$

نقاط بحرانی عبارتند از $\left\{\pm\frac{۱}{۲}, ۰\right\}$

$$f\left(\text{بحرانی}\right) = f\left(\frac{۱}{۲}\right) = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{\frac{۸}{۳}} - \left(\frac{۱}{۲}\right)^{\frac{۲}{۳}} = -\frac{۳}{۴\sqrt[۳]{۴}}$$

$$f\left(\text{بحرانی}\right) = f(۰) = ۰$$

$$f\left(\text{بحرانی}\right) = f\left(-\frac{۱}{۲}\right) = \left(-\frac{۱}{۲}\right)^{\frac{۸}{۳}} - \left(-\frac{۱}{۲}\right)^{\frac{۲}{۳}} = -\frac{۳}{۴\sqrt[۳]{۴}} \;\; \text{می نیمم مطلق}$$

$$f\left(\text{اول بازه}\right) = f(-۸) = (-۸)^{\frac{۸}{۳}} - (-۸)^{\frac{۲}{۳}} = (-۲)^{۸} - (-۲)^{۲} = ۲۵۲$$

$$f\left(\text{آخر بازه}\right) = f(۲۷) = (۲۷)^{\frac{۸}{۳}} - (۲۷)^{\frac{۲}{۳}}$$

$$= (۳)^{۸} - (۳)^{۲} = ۶۵۶۱ - ۹ = ۶۵۵۲ \text{ ماکزیمم مطلق}$$

مثال: ماکزیمم و می نیمم تابع $f(x) = (x+۱)^{\frac{۲}{۳}}$ در بازه ی $[-۲,۱]$ به دست آورید. (تمرین ۸ ص ۸۷ ریاضی عمومی)

حل:

$$f'(x) = \frac{۲}{۳}(x+۱)^{\frac{-۱}{۳}} = \frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x+۱}} = ۰ \to ۲ \neq ۰$$

$$۳\sqrt[۳]{x+۱} = ۰ \to x = -۱$$

$$f\left(\text{اول بازه}\right) = f(-۲) = ۱$$

$$f\left(\text{بحرانی}\right) = f(-۱) = ۰ \text{ مطلق } min$$

$$f\left(\text{آخر بازه}\right) = f(۱) = \sqrt[۳]{۴} \text{ مطلق } max$$

مثال: ماکزیمم و می نیمم تابع $f(x) = ۱ - (x-۳)^{\frac{۲}{۳}}$ در بازه ی $[-۵,۴]$ به دست آورید. (تمرین ۹ ص ۸۷ ریاضی عمومی)

حل:

$$f'(x) = -\frac{۲}{۳}(x-۳)^{\frac{-۱}{۳}} = \frac{-۲}{۳\sqrt[۳]{x-۳}} = ۰ \to -۲ \neq ۰$$

$$۳\sqrt[۳]{x-۳} = ۰ \to x = ۳$$

$$f\left(\text{آخر بازه}\right) = f(۴) = ۰$$

$f\left(\text{اول بازه}\right) = f(-۵) = -۳$ مطلق min

$f\left(\text{بحرانی}\right) = f(۳) = ۱$ مطلق max

مثال: ماکزیمم و می نیمم تابع $f(x) = x^{\frac{۷}{۶}} - \frac{۷}{۲}x^{\frac{۲}{۳}} + ۵$ در بازه ی $[۰,۶۴]$ به دست آورید. (تمرین ۱۰ ص ۸۷ ریاضی عمومی)

حل:

$$f'(x) = \frac{۷}{۶}x^{\frac{۱}{۶}} - \frac{۷}{۲} \times \frac{۲}{۳}x^{\frac{-۱}{۳}} = \frac{۷\sqrt[۶]{x}}{۶} - \frac{۷}{۳\sqrt[۳]{x}} = \frac{۷\sqrt{x} - ۱۴}{۶\sqrt[۳]{x}}$$

$$\to ۷\sqrt{x} - ۱۴ = ۰ \to \sqrt{x} = ۲ \to x = ۴$$

$۶\sqrt[۳]{x} = ۰ \to x = ۰$ غ ق (بحرانی نیست چون ابتدای بازه است)

$f\left(\text{اول بازه}\right) = f(۰) = ۵$

$f\left(\text{بحرانی}\right) = f(۴) = ۵ - ۳\sqrt[۳]{۲}$ مطلق min

$f\left(\text{آخر بازه}\right) = f(۶۴) = ۷۷$ مطلق max

تست: اختلاف مقادیر ماکزیمم و می نیمم مطلق تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۴x & , x > ۱ \\ x^۳ & , x \leq ۱ \end{cases}$ روی بازه ی $[-۱,۴]$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۲

حل: گزینه۳

$$f'(x) = \begin{cases} ۲x - ۴ = ۰ \to x = ۲ \\ ۳x^۲ = ۰ \to x = ۰ \end{cases}$$

$f\left(\text{بحرانی}\right) = f(۰) = ۰\ , f\left(\text{بحرانی}\right) = f(۲) = -۴min$

$f\left(\text{بحرانی}\right) = f(۱) = ۱max$

$f\left(\text{اول بازه}\right) = f(-۱) = -۱, f\left(\text{آخر بازه}\right) = f(۴) = ۰$

$max - min = ۱ - (-۴) = ۵$

مثال: اکسترمم های مطلق تابع $f(x) = |x|(x-۲)$ در بازه ی $[-۱,۲]$ را به دست آورید.

حل:

$x = ۰$

$f(x) = x(x-۲) = x^۲ - ۲x$

$f'(x) = ۲x - ۲ = ۰ \to x = ۱$

$f\left(\text{بحرانی}\right) = f(۱) = |۱|(۱-۲) = -۱$

$f\left(\text{بحرانی}\right) = f(۰) = |۰|(۰-۲) = ۰$

$f\left(\text{اول بازه}\right) = f(-۱) = |-۱|(-۱-۲) = -۳ \to$ مینیمم مطلق

$f\left(\text{آخر بازه}\right) = f(۲) = |۲|(۲-۲) = ۰ \to$ ماکزیمم مطلق

مثال: اکسترمم های مطلق تابع $f(x) = x|x^۲ - ۳|$ در بازه ی $[-\sqrt{۳}, \sqrt{۳}]$ را به دست آورید.

حل:

$x^۲ - ۳ = ۰ \to x^۲ = ۳ \to x = \pm\sqrt{۳}$

$f(x) = x(x^۲ - ۳) = x^۳ - ۳x$

$f'(x) = ۳x^۲ - ۳ = ۰ \to x^۲ = ۱ \to x = \pm ۱$

$f\left(\text{بحرانی}\right) = f(۱) = ۱|۱ - ۳| = ۲$ ماکزیمم مطلق

$f\left(\text{بحرانی}\right) = f(-۱) = (-۱)|۱ - ۳| = -۲$ می نیمم مطلق

$f\left(\text{آخر بازه}\right) = f(\sqrt{۳}) = ۱|۳ - ۳| = ۰$

$f\left(\text{اول بازه}\right) = f(-\sqrt{۳}) = (-\sqrt{۳})|۳ - ۳| = ۰$

مثال: ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = |x^۲ - ۴x + ۳|$ در بازه ی $[۰,۴]$ را به دست آورید.

حل:

$$x^۲ - ۴x + ۳ = ۰ \to (x - ۳)(x - ۱) = ۰ \to \begin{cases} x - ۳ = \to x = ۳ \\ x - ۱ = ۰ \to x = ۱ \end{cases}$$

$f'(x) = ۲x - ۴ = ۰ \to x = ۲$

$f\left(\text{بحرانی}\right) = f(۲) = |۴ - ۸ + ۳| = ۱$

$f\left(\text{بحرانی}\right) = f(۱) = ۰$

$f\left(\text{بحرانی}\right) = f(۳) = ۰$

$f\left(\text{اول بازه}\right) = f(۰) = |۰ - ۴(۰) + ۳| = ۳$

$f\left(\text{آخر بازه}\right) = f(۴) = |۱۶ - ۱۶ + ۳| = ۳$

ماکزیمم مطلق $= ۳$

ویژه صد در صدی ها

نکته: در توابع مثلثاتی اگر بازه ای به ما ندهند دوره تناوب را به دست می آوریم.

$$\begin{cases} y = \sin ax \\ y = \cos ax \end{cases} \rightarrow T = \frac{۲\pi}{|a|}$$

تست: بیشترین مقدار تابع با ضابطهٔ $y = \sin ۲x + ۲\cos x$ کدام است؟(سراسری تجربی۸۷)

۱) $۱ + \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $۱ + \sqrt{۲}$ ۳) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

حل: گزینه ۳

$$\acute{y} = ۲\cos ۲x - ۲\sin x = ۲(۱ - ۲\sin^۲ x) - ۲\sin x$$

$$= ۲ - ۴\sin^۲ x - ۲\sin x = ۰ \xrightarrow{\div -۲} ۲\sin^۲ x + \sin x - ۱ = ۰$$

$$\Delta = ۱ - ۴(۲)(-۱) = ۹, \sin x = \frac{-۱ \pm ۳}{۴} = -۱, \frac{۱}{۲}$$

$$\begin{cases} \sin x = -۱ \rightarrow x = \frac{۳\pi}{۲} \rightarrow f\left(\frac{۳\pi}{۲}\right) = ۰ \\ \sin x = \frac{۱}{۲} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{۶} \rightarrow f\left(\frac{\pi}{۶}\right) = \frac{۳}{۲}\sqrt{۳} \ \ max \\ x = \frac{۵\pi}{۶} \rightarrow f\left(\frac{۵\pi}{۶}\right) = -\frac{۳}{۲}\sqrt{۳} \end{cases} \end{cases}$$

عرض تابع به ازای نقاط ابتدا و انتهای بازه برابر است با:$f(۰) = ۲, f(۲\pi) = ۲$

مطلق تابع $max := Max\left\{۰, \frac{۳}{۲}\sqrt{۳}, -\frac{۳}{۲}\sqrt{۳}, ۲\right\} = \frac{۳}{۲}\sqrt{۳}$

@eshgheriazikonkour ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ حبیب هاشمی www.riazikade.ir

نکته: برای تعیین ماکزیمم و می نیمم توابع به صورت

$$\begin{cases} y = a\sin^۲ x + b\sin x + c \\ y = a\cos^۲ x + b\cos x + c \end{cases}$$

در بازه ی$[۰,۲\pi]$ به جای$\sin x$ و $\cos x$ مقادیر $\left\{-\frac{b}{۲a}, ۰, -۱, ۱\right\}$ مشروط بر آن که $۱ < -\frac{b}{۲a} < -۱$ باشد قرار می دهیم بزرگ ترین مقدار ماکزیمم مطلق و کم ترین مقدار می نیمم مطلق است.

تست: کم ترین مقدار تابع با ضابطهٔ $y = ۱ - \cos^۲ x - \sin x$ کدام است؟(سراسری تجربی)

۱) -۱ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) صفر

حل: گزینه ۳

راه حل اول:

$$\acute{y} = -۲\cos x\,(-\sin x) - \cos x = ۲\sin x\cos x - \cos x$$

$$= \cos x\,(۲\sin x - ۱) = ۰ \rightarrow \begin{cases} \cos x = ۰ \rightarrow x = \frac{\pi}{۲} \\ \sin x = \frac{۱}{۲} \rightarrow x = \frac{\pi}{۶} \end{cases}$$

$$f\left(\frac{\pi}{۲}\right) = ۱ - \cos^۲\left(\frac{\pi}{۲}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{۲}\right) = ۱ - ۰ - ۱ = ۰$$

$$f\left(\frac{\pi}{۶}\right) = ۱ - \cos^۲\left(\frac{\pi}{۶}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{۶}\right)$$

$$= ۱ - \left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^۲ - \frac{۱}{۲} = ۱ - \frac{۳}{۴} - \frac{۱}{۲} = \frac{۴ - ۳ - ۲}{۴} = \frac{-۱}{۴}$$ کم ترین مقدار

راه حل دوم:

$$f(x) = ۱ - cos^۲x - sin\,x$$

$$f(x) = sin^۲x - sin\,x \xrightarrow{\text{با توجه به نکته بالا}} a = ۱, b = -۱, -\frac{b}{۲a} = \frac{۱}{۲}$$

$$\begin{cases} sin\,x = ۱ \rightarrow f(x) = ۱ - ۱ = ۰ \\ sin\,x = -۱ \rightarrow f(x) = ۱ - (-۱) = ۲ \\ sin\,x = \frac{۱}{۲} \rightarrow f(x) = \left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۲} = \frac{-۱}{۴} \text{کم ترین مقدار} \end{cases}$$

مثال: کم ترین مقدار تابع با ضابطهٔ $y = sin^۲x - ۲\,sin\,x$ در فاصلهٔ $[۰,۲\pi]$ را به دست آورید.

حل:

$$f(x) = sin^۲x - ۲sin\,x \xrightarrow{\text{با توجه به نکته بالا}} a = ۱, b = -۲, -\frac{b}{۲a} = ۱$$

$$\begin{cases} sin\,x = ۱ \rightarrow f(x) = ۱ - ۲ = -۱ \text{ کم ترین مقدار} \\ sin\,x = -۱ \rightarrow f(x) = ۱ - (-۲) = ۳ \\ sin\,x = \frac{۱}{۲} \rightarrow f(x) = \left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ - ۲\left(\frac{۱}{۲}\right) = \frac{۱}{۴} - ۱ = \frac{-۳}{۴} \end{cases}$$

مثال: اختلاف ماکزیمم و می نیمم مطلق تابع $y = cos^۲x + sin\,x$ را به دست آورید.

حل:

$$y = cos^۲x + sin\,x = ۱ - sin^۲x + sin\,x$$

$$f(x) = -sin^۲x + sin\,x + ۱$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به نکته بالا}} a = -۱, b = ۱, -\frac{b}{۲a} = \frac{۱}{۲}$$

$$\begin{cases} \sin x = ۱ \to f(x) = -۱ + ۱ + ۱ = ۱ \\ \sin x = -۱ \to f(x) = -۱ - ۱ + ۱ = -۱ \; min \\ \sin x = \frac{۱}{۲} \to f(x) = -\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ + \frac{۱}{۲} + ۱ = -\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۲} + ۱ = \frac{۵}{۴} \; max \end{cases}$$

$$max - min = \frac{۵}{۴} - (-۱) = \frac{۹}{۴}$$

مثال: ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = ۸\cos ۲x - \cos ۴x$ در بازه ی $\left[-\frac{\pi}{۳}, \frac{۲\pi}{۳}\right]$ به دست آورید.

حل:

$$f'(x) = -۱۶\sin ۲x + ۴\sin ۴x$$

$$f'(x) = -۱۶\sin ۲x + ۴ \times ۲\sin ۲x\cos ۲x$$

$$f'(x) = -۱۶\sin ۲x + ۸\sin ۲x\cos ۲x$$

$$f'(x) = ۸\sin ۲x(-۲ + \cos ۲x) = ۰$$

$$\begin{cases} ۸\sin ۲x = ۰ \to \sin ۲x = ۰ \to x = ۰ \\ -۲ + \cos ۲x = ۰ \to \cos ۲x = ۲ \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(۰) = ۸\cos ۲(۰) - \cos ۴(۰) = ۸ - ۱ = ۷ \; max \\ f\left(-\frac{\pi}{۳}\right) = ۸\cos ۲\left(-\frac{\pi}{۳}\right) - \cos ۴\left(-\frac{\pi}{۳}\right) = -\frac{۷}{۲} \\ f\left(\frac{۲\pi}{۳}\right) = ۸\cos ۲\left(-\frac{۲\pi}{۳}\right) - \cos ۴\left(-\frac{۲\pi}{۳}\right) = -\frac{۷}{۲} \end{cases}$$

مثال: کم ترین مقدار تابع $f(x) = \cos^۲ x + \sin x$ در بازه ی $[۰, \pi]$ به دست آورید.

حل:

$$f'(x) = ۲\cos x(-\sin x) + \cos x$$

$$\acute{f}(x) = -۲\sin x \cos x + \cos x = \cos x\,(-۲\sin x + ۱) = ۰$$

$$\begin{cases} \cos x = ۰ \rightarrow x = \dfrac{\pi}{۲} \\ -۲\sin x + ۱ = ۰ \rightarrow \sin x = \dfrac{۱}{۲} \rightarrow x = \dfrac{\pi}{۶} \end{cases}$$

$$f\left(\frac{\pi}{۲}\right) = \cos^۲\frac{\pi}{۲} + \sin\frac{\pi}{۲} = ۰ + ۱ = ۱$$

$$f\left(\frac{\pi}{۶}\right) = \cos^۲\frac{\pi}{۶} + \sin\frac{\pi}{۶} = \left(\frac{\sqrt{۳}}{۴}\right)^۲ + \frac{۱}{۲} = \frac{۵}{۴}$$

$$f(۰) = \cos^۲ ۰ + \sin ۰ = ۱ + ۰ = ۱$$

$$f(\pi) = \cos^۲ \pi + \sin \pi = ۱ + ۰ = ۱$$

کم ترین مقدار $= \min\left\{۱,۱,۱,\frac{۵}{۴}\right\} = ۱$

تست: ماکزیمم مطلق تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{۱}{\sin x + \cos x}$ در بازه ی $\left[۰,\frac{\pi}{۲}\right]$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) ۱ ۴) -۱

حل: گزینه ۳

$$\acute{f}(x) = \frac{(۰)(\sin x + \cos x) - (\cos x - \sin x)(۱)}{(\sin x + \cos x)^۲}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{\sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)^۲} = ۰$$

$$\rightarrow \{\sin x - \cos x = ۰ \rightarrow \sin x = \cos x \rightarrow x = \frac{\pi}{۴}$$

$$\begin{cases} f\left(\frac{\pi}{۴}\right) = \frac{۱}{\sin\frac{\pi}{۴} + \cos\frac{\pi}{۴}} = \frac{۱}{\frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ f(۰) = \frac{۱}{\sin ۰ + \cos ۰} = \frac{۱}{۰ + ۱} = ۱ \\ f\left(\frac{\pi}{۲}\right) = \frac{۱}{\sin\frac{\pi}{۲} + \cos\frac{\pi}{۲}} = \frac{۱}{۱ + ۰} = ۱ \end{cases}$$

ماکزیمم مطلق $= max\left\{۱,۱,\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right\} = ۱$

تست: به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطهٔ $y = \cos^۲ x + \sqrt{۳}\sin x + a$ در فاصلهٔ $\left(۰,\frac{\pi}{۲}\right)$ دارای ماکزیمم یا می نیممی به عرض $y = \frac{۳}{۴}$ خواهد بود؟

۱) ۱   ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) -۱

حل: گزینه۴

$$\acute{y} = ۲\cos x(-\sin x) + \sqrt{۳}\cos x = \cos x\left(-۲\sin x + \sqrt{۳}\right) = ۰$$

$$\begin{cases} \cos x = ۰ \xrightarrow{(۰,\frac{\pi}{۲})} \text{ریشه ندارد} \\ -۲\sin x + \sqrt{۳} = ۰ \to \sin x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \to x = \frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

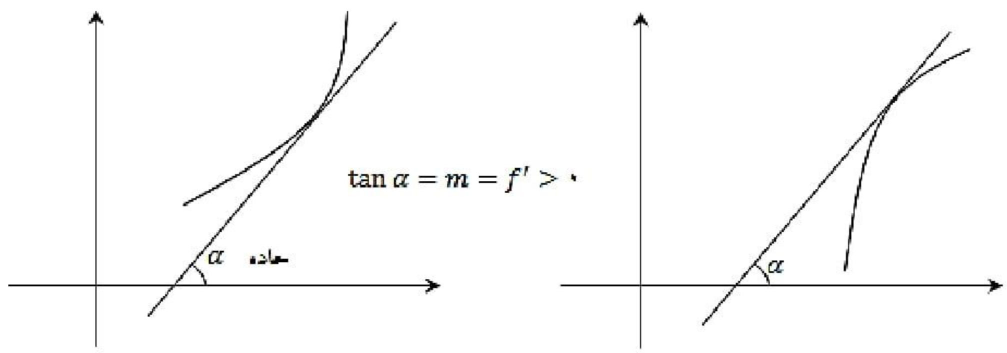
$$f\left(\frac{\pi}{۳}\right) = \frac{۳}{۴} \to \frac{۳}{۴} = \cos^۲\left(\frac{\pi}{۳}\right) + \sqrt{۳}\sin\left(\frac{\pi}{۳}\right) + a$$

$$\to \frac{۳}{۴} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ + \sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} + a \to a = \frac{۳}{۴} - \frac{۱}{۴} - \frac{۳}{۲} = -۱ \to \boxed{a = -۱}$$

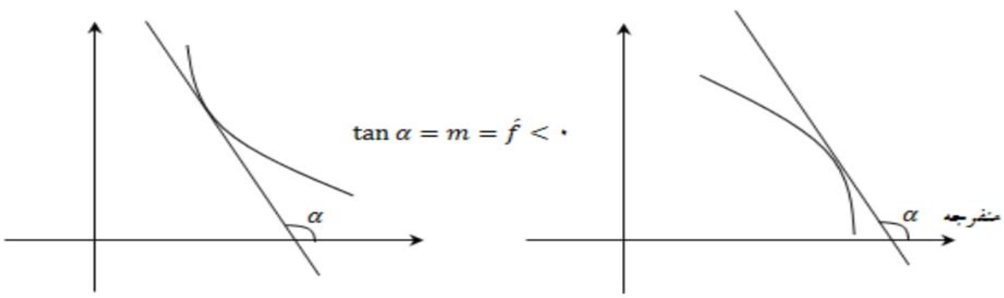
۲ یکنوایی و اکسترمم های نسبی

۲,۱ تعیین فواصل یکنوایی به کمک مشتق

الف) فرض کنیم تابع f پیوسته و مشتق‌پذیر باشد. اگر تابع f در یک فاصله صعودی باشد، مماس بر منحنی در هر نقطه از این فاصله با جهت مثبت محور xها زاویه حاده می‌سازد و تانژانت این زاویه یعنی شیب خط مماس مثبت است بنابراین علامت مشتق تابع در این فاصله مثبت است یعنی $f' > ۰$



ب) اگر تابع f در یک فاصله نزولی باشد، مماس بر منحنی در هر نقطه از این فاصله با جهت مثبت محور xها زاویه منفرجه می‌سازد و تانژانت این زاویه یعنی شیب خط مماس، منفی است. بنابراین علامت مشتق در این فاصله منفی است.



قضیه: فرض کنیم تابع f در بازه‌ی $[a\,,b]$ پیوسته و در بازه‌ی $(a\,,b)$ مشتق‌پذیر باشد:

۱. اگر به ازای هر $x \in (a\,,b)$، $f'(x) > ۰$، آن گاه تابع بر $[a\,,b]$ صعودی است.

۲. اگر به ازای هر $x \in (a\,,b)$، $f'(x) < ۰$، آن گاه تابع بر $[a\,,b]$ نزولی است.

برای تشخیص فواصل یکنوای (صعودی یا نزولی) مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

مرحله ۱. از تابع مشتق می‌گیریم.

مرحله ۲. مشتق تابع را تعیین علامت می‌کنیم.

مرحله ۳. فواصلی که مشتق مثبت است تابع صعودی و فواصلی که مشتق منفی است تابع نزولی است.

۲,۱,۱ تعیین فواصل یکنوایی توابع چند جمله ای

مثال: تابع $y = x^۲ - ۲x$ در چه فواصلی صعودی و در چه فواصلی نزولی است؟

حل:

$$y' = ۲x - ۲ = ۰ \longrightarrow x = ۱$$

x	$-\infty$	۱	∞
$y' = ۲x - ۲$	$-$ $\searrow$	۰	$+$ $\nearrow$

تعیین علامت عبارت درجه اول: ابتدا ریشه را به دست می‌آوریم.

x	$-\infty$ ریشه	$+\infty$
$ax+b$	مخالف علامت a	موافق علامت a

مثال: تابع $y=x^3$ در چه فواصلی صعودی و در چه فواصلی نزولی است؟

حل:

$$y'=3x^2 \longrightarrow x=0$$

x	$-\infty$	0	∞
$\acute{y}$	$+$ $\nearrow$	0	$+$ $\nearrow$

تعیین علامت عبارت درجه دوم وقتی یک ریشه دارد.

x	$-\infty$	ریشه	∞
ax^2+bx+c	موافق علامت a	0	موافق علامت a

مثال: تابع $y=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x+2$ در چه فواصلی صعودی و در چه فواصلی نزولی است؟

حل: همواره نزولی

$$y'=-x^2+x-1 \longrightarrow \Delta=b^2-4ac=(1)^2-4(-1)(-1)$$

$$\Longrightarrow \Delta=-3<0$$

x	$-\infty$ ∞
$\acute{y}$	$-$

تعیین علامت عبارت درجه دوم وقتی ریشه ندارد.

x	$-\infty$ ∞
ax^2+bx+c	موافق علامت a

تست: منحنی نمایش تابع $y=\frac{۱}{۳}x^۳-x^۲-۳x$ در کدام بازه نزولی است؟ (شبیه سراسری ۹۱ خارج از کشور)

۱) $(-۱,۱)$ ۲) $(-۱,۴)$ ۳) $(-\infty,-۱)$ ۴) $(۱,+\infty)$

حل:گزینه۱

$$y=x^۲-۲x-۳\longrightarrow(x-۳)(x+۱)=۰\begin{cases}x=۳\\x=-۱\end{cases}$$

x	$-\infty$	-۱		۳	∞
$x^۲-۲x-۳$	$+$ $\nearrow$	۰	$-$ $\searrow$	۰	$+$ $\nearrow$

تعیین علامت عبارت درجه دوم وقتی دو ریشه دارد.

x	$-\infty$	ریشه کوچک		ریشه بزرگ	∞
$ax^۲+bx+c$	موافق علامت a	۰	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

تست: تابع به معادله‌ی $y=-\frac{۱}{۳}x^۳-x^۲+۵x+۲$ از نظر یکنوایی چگونه است؟

۱) همواره صعودی ۲) همواره نزولی

۳) نزولی، صعودی و سپس نزولی ۴) صعودی، نزولی و سپس صعودی

حل: گزینه۱

$$y'=x^۲-۲x+۵$$

$$\longrightarrow\Delta=b^۲-۴ac=(-۲)^۲-۴(۱)(۵)=-۱۶<۰$$

x	$-\infty$ $+\infty$
$x^۲-۲x+۵$	$+ + + + + + + + + +$ $\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow$

مثال: یکنوایی (صعودی یا نزولی بودن) تابع $y=۲x^۳-۳x^۲-۱۲x+۵$ را بررسی کنید.

حل:

$$y' = ۶x^۲ - ۶x - ۱۲ = ۶(x^۲ - ۱x - ۲)$$

$$\longrightarrow (x-۲)(x+۱) = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = ۲ \\ x = -۱ \end{cases}$$

x	$-\infty$	-۱		۲	∞
$\acute{y}$	$+$ $\nearrow$	۰	$-$ $\searrow$	۰	$+$ $\nearrow$

تست: تابع $y = x^۳ - ax^۲ - bx + ۱$ در بازه‌ی $(-۲\,,۱)$ نزولی و خارج از این بازه صعودی است. حاصل $a - b$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱۵}{۲}$ ۲) $\frac{۱۵}{۲}$ ۳) $\frac{۷}{۲}$ ۴) $-\frac{۷}{۲}$

حل: گزینه۱

$x = ۱$ و $x = -۲$ باید ریشه‌های معادله‌ی $y' = ۳x^۲ - ۲ax - b$ باشند.

$$\begin{cases} x = ۱ \longrightarrow ۳ - ۲a - b = ۰ \\ x = -۲ \longrightarrow ۱۲ + ۴a - b = ۰ \end{cases} \longrightarrow a = -\frac{۳}{۲}\,, b = ۶$$

نکته : هرگاه ریشه های یک معادله ی درجه دوم را داشتیم بهتر است از مجموع(S) و حاصلضرب(P) ریشه های مجهولات را به دست آوریم.

$$\begin{cases} S = -\dfrac{b}{a} \rightarrow ۱ + (-۲) = -\dfrac{-۲a}{۳} \rightarrow -۱ = \dfrac{۲a}{۳} \rightarrow \boxed{a = -\dfrac{۳}{۲}} \\ P = \dfrac{c}{a} \rightarrow -۱ \times ۲ = \dfrac{-b}{۳} \rightarrow \boxed{b = ۶} \end{cases}$$

تست: تابع $y = ۲x^۳ - ۳x^۲ - ۱۲x + ۵$ در بازه‌ی $(a\,,b)$ نزولی است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۶

حل: گزینه۳

$$y' = ۶x^{۲} - ۶x - ۱۲ = ۶(x^{۲} - x - ۲) = ۰ \Longrightarrow \begin{cases} x = ۲ \\ x = -۱ \end{cases}$$

$$(-۱\,,۲) \Longrightarrow a = -۱\,, b = ۲ \Longrightarrow b - a = ۲ - (-۱) = ۳$$

x	$-\infty$	-۱		۲		∞
$\acute{y}$	$+$ ↗	۰	$-$ ↘	۰	$+$ ↗	

نکته: اگر سوال دارای سه شرط زیر به صورت همزمان باشد۱-تابع؛ چندجمله ای درجه سه باشد۲- در سوال مجهول داشته باشیم ۳- سوال از ما همواره صعودی بودن را بخواهد؛چون با مشتق گیری به یک معادله درجه دوم می رسیم برا اینکه همواره صعودی باشد بایستی تابع درجه دوم پس ازتعیین علامت همواره مثبت باشد که برای همواره مثبت بودن تابع درجه دوم دو شرط لازم است شرط اول: ضریب $x^{۲}$ مثبت باشد. شرط دوم: $\Delta \leq ۰$

تذکر: در نکته بالا اگر سوال از ما همواره نزولی بودن را بخواهد دو شرط زیر را بررسی می کنیم شرط اول: ضریب $x^{۲}$ منفی باشد شرط دوم: $\Delta \leq ۰$

تست: اگر تابع هایی به صورت $f(x) = x^{۳} - (m + ۲)x^{۲} + ۳x$ همواره صعودی باشند، آنگاه مجموعه مقادیر m در کدام بازه است؟

۱) $[۵,۱]$ ۲) $[۵, -۱]$ ۳) $[-۵,۱]$ ۴) $[۱,۵]$

حل: گزینه۳

$$\acute{f}(x) = ۳x^{۲} - ۲(m + ۲)x + ۳$$

$$\begin{cases} a > ۰ \\ \Delta \leq ۰ \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} ۳ > ۰ \\ ۴(m^۲ + ۴m + ۴) - ۳۶ \leq ۰ \rightarrow ۴m^۲ + ۱۶m - ۲۰ \leq ۰ \\ \rightarrow ۴(m^۲ + ۴m - ۵) = ۴(m + ۵)(m - ۱) \leq ۰ \end{cases}$$

x	$-\infty$	-۵		۱	∞
$\acute{y}$	$+$		$-$		$+$
	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

تست: به ازای کدام مقدار m تابع $y = x^۳ - ۳x^۲ + ۲mx + ۱$ همواره صعودی است؟

۱) $m \geq \frac{۳}{۲}$ ۲) $m \geq \frac{۲}{۳}$ ۳) $m \leq \frac{۳}{۲}$ ۴) $m \leq \frac{۲}{۳}$

حل: گزینه**۱**

$$\begin{cases} a > ۰ \\ \Delta y' \leq ۰ \end{cases}$$

$$y' = ۳x^۲ - ۶x + ۲m$$
$$\Delta y' \leq ۰ \Longrightarrow (-۶)^۲ - ۴(۳)(۲m) \leq ۰ \longrightarrow ۳۶ - ۲۴m \leq ۰$$
$$-۲۴m \leq -۳۶ \longrightarrow m \geq \frac{-۳۶}{-۲۴} \Longrightarrow \boxed{m \geq \frac{۳}{۲}}$$

تست: منحنی نمایش تابع $y = -x^۴ + ۴x^۳ - ۳$ در کدام بازه صعودی است؟ (شبیه سراسری ۹۱)

۱) $(۲, ۴)$ ۲) $(۰, ۳)$ ۳) $(۰, ۴)$ ۴) $(۲, +\infty)$

حل: گزینه**۲**

$$y' = -۴x^۳ + ۱۲x^۲ = ۴x^۲(-x + ۳) = ۰$$

$$\rightarrow \begin{cases} ۴x^۲ = ۰ \longrightarrow x^۲ = ۰ \longrightarrow x = ۰ \\ -x + ۳ = ۰ \longrightarrow x = ۳ \end{cases}$$

x		۰		۳	
$۴x^۲$	+	۰	+		+
$-x+۳$	+		+	۰	−
y'	+	۰	+	۰	−
	↗		↗		↘

۲,۱,۲ یکنوایی توابع نمایی

* a^u و e^u همواره مثبت هستند.

* اگر $a > ۱$ آنگاه $\ln a$ همواره مثبت است.

* اگر $۰ < a < ۱$ آنگاه $\ln a$ همواره منفی است.

تست: تابع $y = ۲^{x^۲-۴x}$ در کدام بازه صعودی است؟

۱) R ۲) $(-\infty, ۲)$ ۳) $(۲, +\infty)$ ۴) $(۰, ۴)$

حل: گزینه۳

$$y' = (۲x-۴)\underbrace{۲^{x^۲-۴x}\ln ۲}_{\text{همواره مثبت}}$$

x	$-\infty$	۲	∞
$۲x-۴$	− ↘	۰	+ ↗

تست: تابع $y = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲x^۲-۱}$ در کدام بازه نزولی است؟

۱) R ۲) $(۰, +\infty)$ ۳) $(-\infty, ۰)$ ۴) $(-۲, ۲)$

حل:گزینه۲

$$y' = (۴x)\underbrace{\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲x^۲-۱}}_{\text{همواره مثبت}}\ \underbrace{ln\frac{۱}{۲}}_{\text{همواره منفی}}$$

x	$-\infty$ ۰	∞
$۴x$	$-$	$+$
$ln\frac{۱}{۲}$	$-$	$-$
y	$+$	$-$

تست: تابع $y = \frac{x^۲}{e^x}$ در کدام یک از فواصل زیر صعودی است؟

۱) $[۰\,,۲]$ ۲) $[-۲\,,۰]$

۳) $(-\infty\,,-۲)\cup[۰\,,+\infty)$ ۴) $(-\infty\,,۰)\cup[۲\,,+\infty)$

حل: گزینه ۱

$$y' = \frac{۲x.e^x - e^x.x^۲}{(e^x)^۲} = \frac{\overbrace{e^x}^{\text{همواره مثبت}}\ (۲x - x^۲)}{\underbrace{(e^x)^۲}_{\text{همواره مثبت}}}$$

$$\longrightarrow ۲x - x^۲ = ۰ \longrightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۲ \end{cases}$$

x	$-\infty$ ۰	۲	∞
y'	$-$ ↘	$+$ ↗	$-$ ↘

تست: تابع با ضابطه‌ی $y = -e^{-x}$ در کدام بازه نزولی است؟

@eshgheriazikonkour ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ حبیب هاشمی www.riazikade.ir

۱) $\emptyset$ ۲) R ۳) $(\cdot\,,+\infty)$ ۴) $(-\infty\,,\cdot)$

حل: گزینه ۱

$$y' = -(-\text{۱}e^{-x}) = +e^{-x}$$

x	$-\infty$ ∞
$+e^{-x}$	+ + + + + + + + + + ↗↗↗↗↗↗↗↗↗↗↗↗↗↗↗↗

۲,۱,۳ یکنوایی توابع رادیکالی

برای توابع رادیکالی با فرجه زوج ابتدا دامنه‌ی تابع را به دست می‌آوریم.

مثال: یکنوایی (صعودی یا نزولی بودن) توابع زیر را بررسی کنید.

الف) $y = \text{۲}x^{\text{۳}} - \text{۳}x^{\text{۲}} - \text{۱۲}x + \text{۵}$

حل:

$$y' = \text{۶}x^{\text{۲}} - \text{۶}x - \text{۱۲} = \underbrace{\text{۶}}_{\text{همواره مثبت}}(x^{\text{۲}} - x - \text{۲})$$

$$\longrightarrow (x-\text{۲})(x+\text{۱}) = \cdot \rightarrow \begin{cases} x = \text{۲} \\ x = -\text{۱} \end{cases}$$

x		$-\text{۱}$		۲	
$x^{\text{۲}} - x - \text{۲}$	+ ↗	۰	− ↘	۰	+ ↗

ب) $y = x\sqrt{\text{۲} - x^{\text{۲}}}$

حل:

$۲ - x^۲ \geq ۰ \rightarrow$ تعیین علامت

x		$-\sqrt{۲}$		$\sqrt{۲}$	
$۲ - x^۲$	$-$	۰	$+$ جواب	۰	$-$

$$\Longrightarrow D_y = [-\sqrt{۲}\,,\sqrt{۲}]$$

$$y' = (۱)\left(\sqrt{۲ - x^۲}\right) + \frac{۱}{۲\sqrt{۲ - x^۲}}(-۲x) \times x$$

$$\text{مخرج} = \frac{۲ - x^۲ - x^۲}{\sqrt{۲ - x^۲}} = \frac{۲ - ۲x^۲}{\underbrace{\sqrt{۲ - x^۲}}_{\text{همواره مثبت}}} \longrightarrow ۲ - ۲x^۲ = ۰$$

$$\longrightarrow -۲x^۲ = -۲ \longrightarrow x^۲ = ۱ \rightarrow x = \pm ۱$$

x		$-\sqrt{۲}$		-۱		۱		$\sqrt{۲}$	
$۲ - ۲x^۲$			$-$ ↘	۰	$+$ ↗	۰	$-$ ↘		

۲,۱,۴ یکنوایی تابع ln

تست: تابع با ضابطه‌ی $y = ln(x - ۱)$ در کدام بازه نزولی است؟

۱) R ۲) $(۱\,,+\infty)$ ۳) $\emptyset$ ۴) $(-\infty\,,۱)$

حل: گزینه۳

$$y' = \frac{۱}{x - ۱}$$

ln دامنه : $\{x - ۱ > ۰ \Rightarrow x > ۱ \Rightarrow D: (۱, +\infty)$

x	$-\infty$	۱	∞
	$-$	o	$+$

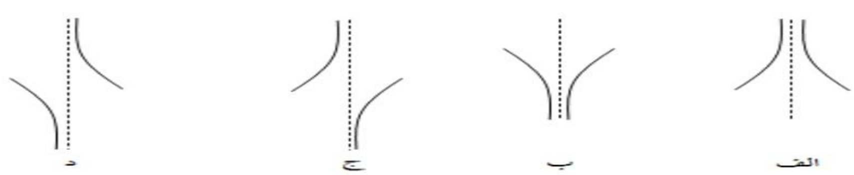
گزینه ۴ نادرست است چون جز دامنه نیست.

۲,۱,۵ یکنوایی توابع کسری

برای تعیین صعودی و نزولی بودن توابع کسری از نکته زیر (بدون استفاده ازمشتق گیری وتعیین علامت)کمک می گیریم اگر به جواب رسیدیم که کار تمام است در غیر اینصورت بایستی به کمک مشتق وتعیین علامت جواب را مشخص کنیم.

نکته۱: در توابع کسری، اگر ریشه‌های مخرج (مجانب قائم) در فاصله‌ای قرار گیرد تابع کسری در آن فاصله نه صعودی است و نه نزولی.

زیرا اگر منحنی f مجانب قائم داشته باشد نمودار آن به یکی از حالت‌های



در اطراف مجانب (ریشه‌های مخرج) است که در هر حالت می‌توانیم با مثال نقض یکنوا نبودن را نشان دهیم.

نتیجه: در توابع کسری اگر ریشه‌ی مخرج در فاصله‌ای قرار گرفته باشد در آن فاصله تابع نه صعودی است و نه نزولی به عبارت دیگر برای اینکه یک تابع کسری در فاصله‌ای صعودی یا نزولی باشد باید ریشه مخرج در آن فاصله نباشد.

تست: تابع $y = \frac{۳x-۱}{۲x+۱}$ در کدام بازه‌ی زیر اکیداً صعودی است؟

۱) R ۲) $\left(-\infty , -\frac{۱}{۲}\right)$ ۳) $(-\infty , ۰)$ ۴) $(-۱ , +\infty)$

حل: گزینه۲

$۲x + ۱ = ۰ \longrightarrow x = -\frac{۱}{۲}$ ریشه‌ی مخرج

هر فاصله‌ای که شامل $-\frac{۱}{۲}$ باشد آن فاصله نه صعودی است و نه نزولی تنها گزینه‌ای که $-\frac{۱}{۲}$ در آن قرار ندارد گزینه ۲ است.

تست: کدام تابع زیر در دامنه‌ی خود یکنواست؟

۱) $y = \frac{۱}{x-۱}$ ۲) $y = x - \frac{۱}{x}$ ۳) $y = \frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}$ ۴) $y = \tan x$

حل: گزینه۴

گزینه ۱ : چون $x = ۱$ ریشه‌ی مخرج است پس این تابع نه صعودی است و نه نزولی

گزینه ۲ : چون $x = ۰$ ریشه‌ی مخرج است پس این تابع نه صعودی است و نه نزولی

گزینه ۳ : چون $x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$ ریشه‌های مخرج هستند پس این تابع نه صعودی است و نه نزولی

تست: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = \frac{x}{۱-x^۲}$ بر کدام بازه صعودی است؟ (سراسری تجربی)

۱) $(-۲ , ۰)$ ۲) $(-\infty , -۲)$ ۳) $(۰ , ۲)$ ۴) $(-۲ , ۲)$

حل: گزینه۲

ریشه‌های مخرج (مجانب) $\longrightarrow ۱ - x^۲ = ۰ \longrightarrow x^۲ = ۱ \longrightarrow \boxed{x = \pm ۱}$

فواصلی که شامل ± 1 هستند نه صعودی‌اند نه نزولی.

تست : نمودار تابع با ضابطه ی $y = \frac{x^2+x}{x^2+x+1}$ بر کدام بازه نزولی است؟

۱) R ۲) $\left(-\infty , -\frac{1}{2}\right)$ ۳) $\varnothing$ ۴) $\left(\frac{1}{2} , +\infty\right)$

حل: ابتدا ریشه های مخرج را به دست می آوریم واز نکته بالا استفاده می کنیم

$$x^2 + x + 1 = 0 \longrightarrow \Delta < 0 \quad \text{ریشه ندارد}$$

چون مخرج ریشه ندارد نمی توان هیچ کدام از گزینه ها را حذف کرد پس به سراغ مشتق و تعیین علامت می رویم.

$$y' = \frac{(2x+1)(x^2+x+1) - (2x+1)(x^2+x)}{(x^2+x+1)^2}$$

$$y' = \frac{(2x^3+2x^2+2x+x^2+x+1) - (2x^3+2x^2+x^2+x)}{(x^2+x+1)^2}$$

$$\frac{2x+1}{\underbrace{(x^2+x+1)^2}_{\text{همواره مثبت}}} \longrightarrow 2x+1 = 0 \longrightarrow x = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	∞
$2x+1$	$-$	0	$+$

تذکر: در توابع کسری چون بعد از مشتق گیری مخرج همواره به توان ۲میرسه پس همواره مثبته و نیاز نیست آن را در جدول تعین علامت قرار دهیم اما ریشه‌های مخرج را(در صورت وجود) در جدول تعیین علامت قرار می‌دهیم.

تست : نمودر تابع با ضابطه ی $y=\frac{x^{۲}+۱}{x}$ کدام بازه صعودی است ؟

۱) $(-\infty\,,-۱)$ ۲) $(-\infty\,,۱)$ ۳) $(۰\,,۱)$ ۴) $(-۲\,,۲)$

حل : ابتدا ریشه مخرج را به دست می آوریم.

$x=۰$

گزینه هایی که شامل ریشه مخرج($x=۰$) باشند تابع نه صعودی است و نه نزولی پس گزینه های ۲ و ۴ حذف می شوند بـرای حـذف گزینـه ی دیگـر مجبـوریم از مشـتق و تعیین علامت کمک بگیریم با توجه به جدول زیر گزینه ۳ نیزحذف می شود.

$$y'=\frac{(۲x)(x)-(۱)(x^{۲}+۱)}{x^{۲}}=\frac{۲x^{۲}-x^{۲}-۱}{x^{۲}}=\frac{x^{۲}-۱}{\underbrace{x^{۲}}_{\text{همواره مثبت}}}$$

$$\longrightarrow x^{۲}-۱=۰\Longrightarrow x^{۲}=۱\Longrightarrow x=\pm۱$$

x		-۱		۰		۱	
$x^{۲}-۱$	$+$		$-$		$-$		$+$

تست: به ازای چه مقادیری از a تابع $y=\frac{ax+a-۲}{x+a-۲}$ در اعداد حقیقی مثبـت، صـعودی است؟

۱) $a<۱$ ۲) $a>۱$ ۳) $a<۲$ ۴) $a>۲$

حل: گزینه۴

شرط اول: برای صعودی بودن بایستی مشتق تابع مثبت باشد یعنی $y'\geq ۰$

$$y'=\frac{a(x+a-۲)-۱(ax+a-۲)}{(x+a-۲)^{۲}}=\frac{a^{۲}-۳a+۲}{\underbrace{(x+a-۲)^{۲}}_{\text{همواره مثبت}}}\geq ۰$$

$$a^{۲}-۳a+۲=(a-۲)(a-۱)=۰\to\begin{cases}a=۱\\a=۲\end{cases}$$

x	$-\infty$ ۱ ۲ ∞		
$\acute{y}$	$+$ $\nearrow$	$-$ $\searrow$	$+$ $\nearrow$

$\Longrightarrow a \geq ۲$ یا $a \leq ۱$ (۱)

شرط دوم: باید ریشه مخرج در فاصله‌ی داده شده قرار نداشته باشد در فاصله $(۰ , +\infty)$ نباشد پس باید در فاصله‌ی $[۰ , -\infty)$ قرار بگیرد.

ریشه مخرج : $x = -a + ۲ \leq ۰ \Longrightarrow a \geq ۲$ $\quad (۲)$

از دو جواب قبل اشتراک می‌گیریم: $(۱) \cap (۲) \Longrightarrow a \geq ۲$

تست: تابع $y = \frac{ax+۲}{x+a-۱}$ روی بازه‌ی $(۱ , -\infty)$ نزولی است حدود a کدام است؟

۱) $a < -۲$ یا $a \geq ۲$ $\qquad$ ۲) $۰ \leq a \leq ۲$

۳) $-۱ \leq a \leq ۲$ $\qquad$ ۴) $-۱ \leq a \leq ۰$

حل: گزینه۴

$$(۱) : \ y' \leq ۰ \longrightarrow y' = \frac{a(x+a-۱) - ۱(ax+۲)}{(x+a-۱)^۲} = \frac{a^۲ - a - ۲}{\underbrace{(x+a-۱)^۲}_{\text{همواره مثبت}}}$$

$$a^۲ - a - ۲ = ۰ \longrightarrow (a-۲)(a+۱) = ۰ \longrightarrow \begin{cases} a = ۲ \\ a = -۱ \end{cases}$$

x	$-\infty$ -۱ ۲ ∞		
$a^۲ - a - ۲$	$+$ $\nearrow$	$-$ $\searrow$	$+$ $\nearrow$

$\longrightarrow \boxed{-۱ \leq a \leq ۲}$

$(۲) \ : \ x + a - ۱ = ۰ \longrightarrow x = -a + ۱ \longrightarrow -a + ۱ \geq ۱$

$\longrightarrow -a > ۰ \longrightarrow \boxed{a \leq ۰}$

اشتراک : $-۱ \leq a \leq ۲ \cap a \leq ۰ \longrightarrow -۱ \leq a \leq ۰$

۲,۲ به دست آوردن ماکزیمم و می نیمم نسبی به کمک مشتق

۱.از تابع مشتق می گیریم و نقاط بحرانی را به دست می آوریم.(نقاط بحرانی کاندیدای اکسترمم نسبی هستند)

۲.مشتق را